COLLEZIONE

DI

TRATTATI

APPARTENENTI ALL' INVENZIONE GEOMETRICA.

GEOMETRIA DI SITO

SUL PIANO, E NELLO SPAZIO.

GEOMETRIA

DI

SITO

SUL PIANO, E NELLO SPAZIO

DI V. FLAUTI.

Situs linearum varios dignoscere , et eum alias omnes , tum et ipsius quantitatis relationes , si quae ex situ oriundae, vel lineis ipsis , vel figuris quas lineae claudunt , intercedunt , explorare , id , ni fallor , Geometriae munus est.

SAM. HORSLEY.

NAPOLI

NELLA STAMPERIA DELLA SOCIETA' TIPOGRAFICA

1815.

A FERGOLA

Quantunque volte, o Illustre Fergola, l'occasione mi si presenta di meditare sugli originali de' Greci Geometri, è forza che io resti vie più convinto, che le loro invenzioni in Geometria grandemente prevalgano alle scoperte di questo genere fatte a' nostri tempi. Ed a me pare, che fino a tanto che non possederemo co' nostri metodi tante diverse dottrine su i luoghi geometrici, quante gli antichi ne inventarono a dovizia; che i sapientissimi libri de' porismi del saggio Euclide non saranno coll' analisi moderna restituiti (difficilissimo lavoro); e che inoltre metodi non ritroveremo atti a construir problemi oltre il quarto grado, uopo è che ci riconosciamo di gran lunga inferiori agli antichi. Abbandonar dunque la loro guida, come oggigiornò la più parte costuma, e tener da pocó i loro precetti, e le loro opere non istudiar perfettamente, per colui che vuole innoltrarsi nell' ardua carriera dell' invenzione geometrica, dandosi tutto all' analisi moderna, è lo stesso, come ben diceva un dotto Italiano (*), che introdursi senza filo in un oscuro laberinto.

(*) Il celebre Giuseppe Torelli autore del bellissimo Archimede stampato in Oxford nel 1792.

Coltivarono con ardentissimo amore le opere degli antichi, e le studiarono profondamente il Cartesio, il Fermat, l'Ugenio, il Newton, il Leibnitz, i Bernulli, l' Eulero, e tanti altri che vissero in tempi non molto da noi discosti; e nuove scoperte importanti, e nuovi metodi ancora si videro dalle loro considerazioni derivare: nè il secolo scorso dopo essi, abbia il vero il suo luogo, ha molto aggiunto alle loro invenzioni.

Il trattar dunque ramo che alla Geometria degli antichi si appartenga, esser lodevol cosa, a Voi nol debbo io ridire. Tale parmi che sieno le dottrine geometriche di Sito, che nel presente trattato imprendo ad esporre; poichè sebbene non vi sia da dubitare, che in questa parte importante del luogo di risoluzione, ove la Geometria dispiega tutta la sua attività e 'l suo impero, non mancarono gli antichi di stabilire immensa dottrina, ciò non pertanto questa dall' ingiuria de' tempi è stata interamente a noi tolta. Nè finora per quanti moderni io sappia, che abbian cercato di occuparsene, alcuno mai è arrivato a tal punto da poter dire o d' aver restituito ciò che gli antichi avevano scritto, o almeno d' avere indicate le tracce delle loro dottrine, o finalmente d' aver fatto conoscere, ch' essi se ne fossero una volta giudiziosamente occupati.

Io ho dunque impreso questo lavoro, sperando, che la gioventù Napolitana possa valersi di un tal trattato, non solamente per l'utilità, che in molti casi le construzioni, che vi si contengono, potranno recare in pratica a' bisogni della società; ma anche perchè possa servirsene a guida nell'ardua carriera del geometrico inventare, fintanto che nuova, e migliore scorta non gli sarà permesso di avere dalle sublimi produzioni del vostro ingegno.

Ma perchè a costoro non mancassero quelle nozioni di Sito, che i moderni sommi Analisti hanno cercato di stabilire, e talune delle quali sono importantissime al perfezionamento delle matematiche, ho proccurato ad essi quest' altro vantaggio in un libro, che pubblicherò in seguito col titolo di *Geometria Analitica di Sito*, il quale altro trattato ha formato per ben due volte il soggetto delle mie lezioni di Analisi nell' Università degli Studj. E spero che voglia ad essi non poco giovare che in tal trattato vi abbia raccolte, senza spirito di sistema, quelle teoriche di Sito alle quali l' Analisi moderna può riuscir vantaggiosa.

Che se a voi parrà, che le mie intenzioni non sieno affatto indegne di lode, e che io vi abbia in qualche parte adempiuto, non troverete fuor di proposito, che

qual segno di antica riconoscenza, e di rispetto le abbia a Voi indirizzate. E sovvengavi, che in ciò io imito ancora l' esempio di que' primi sommi Maestri, verso i quali Voi col vostro operare, e cogl' insegnamenti tanta venerazione m' inspiraste. Nè io, volendo seguire sí degno loro costume, potea ad altri rivolgermi, che al restitutore dell' antico geometrizzare in queste nostre partenopee contrade, ed al fondatore in esse di una Scuola ove i due metodi vi sono con pari studio coltivati, e nella quale non pochi dotti Napolitani si sono addestrati nella palestra matematica, di talun de' quali vi sia grato che io ricordi talvolta il nome in questa mia opera, recando qualcheduna delle sue utili meditazioni.

Gradite intanto i sentimenti della mia riconoscenza, e del profondo rispetto con cui ho l' onore di essere

Napoli 25. Settembre 1815.

Umilis. Divotis Serv., ed Amico
VINCENZO FLAUTI

INTRODUZIONE,

E DISEGNO DELLA PRESENTE OPERA.

La diversità del titolo di un libro non prova, ch' esso sia sostanzialmente diverso da un altro: ma quale ch' ella siasi la materia che deve trattarsi, è necessario il darlo preciso, ed in modo da non farsi, che tale scienza diventi un mistero per colui, che non ne ha cognizione veruna. Furon forse queste le ragioni, che indussero il Signor Lacroix, Geometra che mette molta precisione, ed esattezza ne' suoi lavori, a denominar *Geometria su i piani e le superficie curve* quello stesso ramo di Geometria, al quale egli, ed il Signor Monge avevano contemporaneamente avuto parte per ridurlo in forma scientifica, e che quest' ultimo aveva chiamato *Geometria Descrittiva*. In verità qual' è l' idea, che dovrà formarsi anche un Geometra al sentirsi annunziar *Geometria Descrittiva*, quando non sia preventivamente informato dell' oggetto di questa scienza: e quello ch' è più, quando le definizioni che di essa possono darsi, nè pur s' intendano, se prima uno non siasi alquanto inoltrato in apprenderla, e se non abbia l' abitudine alle sue construzioni.

Ma se il titolo scelto dal Lacroix è men vago di quello del Monge, esso però non parmi ancora abbastanza preciso, nè tampoco può da esso

rilevarsi a che cosa appartenga questo nuovo ramo di Geometria. E se nelle cose geometriche si può considerare il loro sito, la grandezza, il rapporto, e la figura, resterà sempre dubbio, ed indeterminato quali di queste cose s' imprendano a trattare nel presente ramo di Geometria. Queste ragioni mi hanno spinto a mutare il titolo della prima edizione della mia *Geometria Descrittiva* nell'altro di *Geometria di Sito sul piano, e nello spazio*; e senza, che io ne vada mostrando la convenienza coll' oggetto di cui trattasi, e la facilità a comprendere questo qual sia, ciascuno potrà vederlo da se medesimo.

Nella passata edizione già molto mi era allontanato dall'opera del Monge, sicchè la mia non potesse dirsi una semplice esposizione di quella. Non intendo già, che io avessi mutate le regole di tale Scienza, o i problemi che in essa si risolvono. E chi è mai colui di sì poco intendimento, che vorrà ciò pretendere, sapendo, che io scriveva *Geometria Descrittiva*, e che la scriveva dopo del Monge! E poi le regole di questa scienza eran tali nelle Arti di construzione anche prima, che alcun libro di Geometria Descrittiva esistesse. Che? forse non fu tenuto Apollonio Pergeo nelle Scuole Greche, ed appo noi, per autor delle Sezioni coniche, perchè Euclide ed altri prima anche di lui ne avevan trattato? O forse si pretenderà che Apollonio avesse bandite tutte le verità da quello dimostrate, ed inventatene altre tutte nuove? Ed all' accuratissimo Eu-

clide non si sa pure che altri Elementi Geometrici precedettero, e ch' egli non per tanto fu riputato au'or degli Elementi; perchè, al dir di Proclo, raccolse, e construì molte cose di quelle ritrovate da Eudosso, e perfezionò molte delle invenzioni di Teeteto: inoltre ridusse a tal rigore le dimostrazioni delle verità debolmente dimostrate prima di lui, che le rendè superiori a qualunque difficoltà o cavillazione (*).

Bisogna dunque persuadersi, che la novità ne'trattati Geometrici non consiste già nel rinnovar tutto, ch' è una sciocchezza il dirlo; ma in esporre le cose già dette con miglior sistema, e con un ordine più chiaro; al che se aggiungasi una maggior eleganza nelle soluzioni de' problemi, e nella dimostrazione de' teoremi, si sarà senza dubbio molto contribuito al miglioramento della scienza; mentre grandissima è la differenza che passa tra un problema comunque risoluto, e lo stesso condotto a fine con un metodo elegantissimo, cioè con un'analisi breve e chiara, e con una composizione facile e precisa; nè v' ha geometra sensato che di ciò non convenga (**). Con questi principj presenti allo spirito, ciascuno potrà valutare qual parte ebbi nella compilazione de' miei Elementi di Geometria Descrittiva in tempi che l' Italia non pos-

---

(*) Veggasi questo luogo di Proclo nella nota 8 del Discorso preliminare de' nostri Elementi di Euclide.

(**) Si riscontri la Pref. dell' Halley a' due libri *de Sectione Spatii* di Apollonio, da lui restituiti.

sedeva alcun libro di questo genere. Io cercai di render precisi i termini tecnici di tale scienza più che non s' era da altri già fatto, di aver riguardo a render descrittivamente le construzioni che in essa dovevan farsi, vale a dire di eseguirle sempre su i determinanti descrittivi de' dati, e non su questi, il che era contrario all'oggetto di una tale scienza; in modo però che vi esistesse tra queste due soluzioni quel nesso che si conveniva. Considerando poi che ogni Problema di Geometria ha due soluzioni tra loro distinte, quella cioè che deve apprendersi per iscienza, necessaria al Geometra, e l' altra di esecuzione, che deve servire all' Artista ne' suoi travagli; e che solamente in questa seconda conviene eseguire tutte le construzioni incidenti, che basta solamente indicar nella prima, tenni questo metodo in que' miei Elementi, come ognuno potrà cominciare a rilevarlo dalle semplici soluzioni de' Problemi del Cap.II di essi. Finalmente molte construzioni de' più importanti e difficili Problemi di questa scienza furono da me eseguite in una maniera ben diversa dalla già fatta; e per non notare che solamente quelle ove tal differenza è più sensibile, indicherò le Proposizioni 31, 32, 49, 52, 53, 54.

Molte altre cose potrei far anche notare da me rapportate, che nelle istituzioni di Geometria Descrittiva che mi avevan preceduto, non contenevansi; ma io non ho intrapreso a far quì l' analisi del mio libro, di cui sufficientemente sono

stato ricompensato dalla buona accoglienza che gli fece il pubblico, e dal gradimento con cui l'accolsero non pochi dotti Geometri Italiani de' nostri tempi.

Ecco qual parte io ebbi nella compilazione degli Elementi di Geometria Descrittiva da me pubblicati nel 1807. Ma la diversità, che si troverà tra essi ed il trattato che ora pubblico col titolo di *Geometria di Sito*, e quindi tra questo, e le altre istituzioni di Geometria Descrittiva finora pubblicate da altri è tale, che in verità posso dire, che la presente opera è interamente nuova, sebbene si versi sull' argomento stesso. Ed ecco in che principalmente consiste tanta diversità, e le ragioni che mi hanno spinto a quanto ho fatto.

La Geometria Descrittiva aveva per oggetto la determinazione del sito delle cose geometriche nello spazio, per mezzo de' loro convenevoli determinanti su piani dati. Or, chi non vede che il rigor geometrico, e l' esattezza che deve porsi nello scrivere elementi esigeva, che prima si fosse ben fissata quest' idea astratta di sito, che formava il fondamento della scienza, e che poi si fosse anche stabilito in qual modo poteva fissarsi il sito di que' determinanti in un piano. Senza questa preventiva cognizione ognuno ben comprende, che i Problemi della moderna Geometria Descrittiva resterebbero sempre imperfettamente determinati, ed incapaci di una comoda, ed elegante construzione.

Io dunque nel primo capitolo della presente mia opera ho esposto distintamente, e quanto convenivasi le cose poc' anzi dette; e poi negli altri ho comprese in tante Proposizioni di dati le principali teorie di sito nello spazio, cioè ho esposti i convenevoli determinanti de' punti delle linee, e delle superficie nello spazio, su piani dati. E queste teorie di sito le ho poi applicate nel quinto Capitolo alla soluzione di alcuni importanti problemi, la maggior parte de' quali non è senza uso nelle seguenti ricerche.

Con questo metodo che ora ho tenuto, non solamente mi sono uniformato, in un opera di pura Geometria, al metodo degli antichi Geometri, rendendo così questa nuova scienza degna di aver parte nella serie de' libri d' istituzione geometrica ch'essi ci hanno lasciati; ma ho potuto anche esporre le teorie di sito in una maniera più facile a comprendersi, ed a ritenersi. Or per evitare ne' giovani quella confusione d'idee che sogliono produrre in loro quelle voci delle quali, sebbene per l'avviamento che hanno nelle scienze geometriche, par che ne intendano il significato, pur tuttavia non possono di esse comprenderne interamente la forza, stimo quì opportuno di prevenirli, che per *dato*, o *proposizione di dato* s' intende ogni teorema nel quale proponesi a dimostrare, che sia data qualche cosa la quale ha un rapporto determinato con quelle altre cose, che sono date per ipotesi. Quantunque però si sia detto esser tali proposizioni de' teoremi, pur tut-

tavia esse possono anche enunciarsi in forma di problemi, proponendo di ritrovare quelle cose, che dovevansi dimostrare date. Il che facendo, la dimostrazione del dato proposto come teorema sarà l'analisi geometrica del problema. Quindi si rileva anche, come possa farsi uso delle determinazioni delle proposizioni di dati esposte come teoremi, quando esse debbono far parte delle costruzioni de' problemi di sito, ne' quali se ne ha bisogno.

Or quantunque in questo ramo di Geometria non si tratti che di dati di sito, pur tuttavia la determinazione di essi è sì strettamente legata a quella degli altri dati, che non posso fare a meno di dar qui una leggerissima idea anche di questi; inviando i giovani, che ne vogliono essere completamente istruiti, al libro de' Dati di Euclide, o al primo libro dell'*Arte d' inventare* del nostro Signor Fergola (*).

(*) Mi sono permesso di proporre a' giovani per loro istruzione in questo genere, come in ogn'altro d'invenzione geometrica una tal opera del Signor Fergola, quantunque di essa non siasene finora pubblicato che il solo prospetto, perchè n'esistono moltissimi esemplari manoscritti; mentre il citato insigne nostro Geometra ha con tal trattato educata per quarant'anni la sua scuola ne' metodi dell'antica Geometria, cui maestrevolmente innestava quelli, che camminando sulle orme de' Greci avevan poi ritrovati, servendosi della moderna Analisi, insigni uomini a noi più vicini, tra' quali principalmente il Cartesio, ed il Newton. Io spero intanto di poter pubblicare al più presto possibile

Dirò dunque che il dato geometrico consiste nell' assegnare una qualche cosa per mezzo di operazioni che la Geometria somministra. Ed essi *dati* distinguonsi in quattro generi, cioè di *grandezza*, di *ragione*, di *specie*, e di *sito*.

Si dice *dato di grandezza* una quantità geometrica, se per mezzo di una nota costruzione di Geometria le se ne può assegnare un' altra uguale: così è dato di grandezza un triangolo, se n'è data la sua base e l' altezza, o pur se ha i lati intorno ad un suo dato angolo reciprocamente proporzionali a due rette date; poichè e l' uno e l'altro di essi si può geometricamente assegnare, il primo per la 35 del I°. libro degli Elementi, e l'altro per la 15 del VI°. E così pure è dato di grandezza un cerchio, se n' è dato il raggio; ed è dato di grandezza un angolo solido, se sono dati gli angoli piani che lo comprendono; poichè per lo post. 3 si può assegnare quel cerchio, ed un tal angolo si può constituire per mezzo della 23 El. XI.

E dagli esempj rapportati si potrà rilevare, che i dati geometrici di grandezza possono anche andar disgiunti dal valore della cosa, che si dice

---

il mio Trattato intitolato *Introduzione allo studio delle opere degli antichi Geometri*, ed il quale supplirebbe a sufficienza all' opera del Signor Fergola, che circostanze di salute non permettongli di stampare, con grandissimo discapito della gioventù e della nazione, che da tal libro acquisterebbe nuovo decoro e splendore.

data, cioè a dire, che potrà esser data geometricamente una cosa, tuttochè affatto non si possa determinare il suo vero valore; tal' è il cerchio che, come si è detto, è dato di grandezza, se è dato di grandezza il suo raggio, benchè da questo non si possa esibire il valore esatto di quello.

Una *ragione* si dice poi geometricamente data, se possiamo, per mezzo di una construzione di Geometria, esibir due grandezze, le quali abbiano fra loro una tal ragione: e per l'eleganza dell'esibizione conviene, che queste sieno due linee rette. Ed egli è chiaro perciò, che se è data una ragione, può sempre formarsene un' altra uguale, e che abbia un dato antecedente.

Dalla definizione data si rileva, che una ragione geometrica può esser data, tuttochè non si sappia il suo esponente, o pur che questo non si possa assegnare; come avviene allorchè i termini di tal ragione sono incommensurabili tra loro. E sarà facile poi il rilevare, che essendo data una ragione geometricamente, sia anche data quella, che si ottiene invertendola, componendola, dividendola, e convertendola, e che ne sia di più data la sua duplicata, triplicata, etc. Ed in generale che essendo date più ragioni geometriche, sia anche data quella che da esse si compone: poichè tutte queste cose sono di facile esibizione per mezzo di alcune proposizioni del V°., e del VI°. degli Elementi.

Inoltre una figura si dirà data di specie, se le se ne può esibire un' altra simile.

Così un triangolo sarà dato di specie, se sono dati due suoi angoli; o pur un angolo e 'l rapporto de' lati intorno ad esso; o il rapporto di un lato a ciascuno degli altri due: poichè facilmente gliesene potrà constituire uno simile (4, 5, 6 El. VI). E così pure un parallelepipedo sarà dato di specie se sien dati i rapporti di tre suoi lati intorno ad un angolo, il quale sia dato di grandezza, cioè sia contenuto da tre angoli piani dati.

Quali dati si dicano di *sito*, sarà detto a sufficienza nel principio del Cap. I. di questo Trattato.

I dati, di cui si è parlato, possono combinarsi anche tra loro in modo tale da formare delle cose date nel tempo stesso di grandezza e di specie, di grandezza e di ragione, di grandezza e di sito, di specie e di sito; o pur potranno combinarsi tre a tre, o anche tutti quattro insieme; e da queste combinazioni si traggono infinite utilissime conseguenze per la teoria de' dati. Noi qui faremo solamente notare, poichè ci occorrerà di farne uso in appresso, che un triangolo sarà dato di specie e di grandezza se sono dati due suoi angoli, ed un lato qualsivoglia; o pure un angolo ed i due lati che lo comprendono; o finalmente i tre lati: e la ragione è facile ad avvertirsi anche da coloro che conoscono gli Elementi di Geometria Piana solamente.

Ma ritornando da questa digressione ad esporre il sistema di questa mia opera, farò avvertire che nel Capitolo V. ho trattato de' determinanti del sito di alcune superficie curve, cioè delle superficie

coniche, cilindriche, e di rivoluzione, riserbandomi a trattare altrove, e nel proprio loro luogo, le stesse ricerche per un' altra famiglia estesissima di superficie curve delle quali farò tra poco parola. Ho preferito questa volta il metodo di procedere per induzione in esibir questi determinanti, rinunziando al sistema di stabilire un principio generale, come altra volta feci, e come trovasi praticato dal Monge, e dagli altri Geometri descrittivi; perchè questo metodo particolare, e procedente per esempj mi è sembrato più comodo ed agevole, e meno atto ad indurre in equivoco nelle particolari applicazioni; e son sicuro che quando il bisogno lo richiegga, o pur quando si voglia anche farlo per pura speculazione, ognuno sarà nel caso di assegnare i determinanti del sito di una superficie curva per se stesso immaginata, con più facilità di quella, che gliene potrebbe venire se dovesse usar la regola generale, che, come ho già detto, l' altra volta assegnai.

Ed in questo rincontro ho fatto rilevare di passaggio, ciò che forse in altro luogo mi riuscirà di provare più di proposito, cioè, che per retta via non procedono coloro i quali, quasi recandosi a scorno di far servire la Geometria a se stessa, vogliono indagare con la pura Analisi algebrica le affezioni delle teorie di sito, che riguardano principalmente l' ultima specie delle superficie suddette. Essi pervengono così non solamente, per mezzo di lunghissimi giri a risultati che la Geometria facilmente mostra a chi sa farne la sua guida; ma

spesse volte questi risultati sono di tal grado di astrazione, che diventano inconstruibili, ed anche inconcepibili.

Io non so da chi debba ripetersi questo traviamento dal retto sentiero d' inventare e di dimostrare in Geometria; ma sicuramente ch' esso è pernicioso alla Gioventù, alla quale oggigiorno non si fa altro che empir la testa di nomi ampollosi e di formole delle quali non sa usare nelle particolari applicazioni, e che poi dimentica un momente dopo di averle imparate a memoria; giacchè essa nessun nesso di ragionamento geometrico si forma su di quelle nella mente, come nessun nesso vi è tra astrattissimi simboli, e construzioni di Geometria. Noi ne vogliamo troppo veramente da' giovani: è già molto che il loro spirito si assuefaccia a mandarci buone come verità di Geometria quelle che si sono rilevate con pure operazioni algebriche, partendosi però da una verità esposta in figura, cioè dal risultato di una construzione; e che perciò può loro facilmente anche indicarsi come quel cammino analitico possa passo passo rapportarsi a passaggi di Geometria. Ma pretendere ch' essi si convincano interamente di un risultato analitico, che deve corrispondere ad una verità geometrica incomprensibile in figura, è una stranezza, che mostra come a gran passo noi stiamo travagliando per far decadere le Matematiche per troppo innalzarle. Ritorniamo dunque un po indietro, se vogliamo arrestar questo male, e seguiamo nell' applicar l' Analisi alla Geometria in

questo genere di ricerche quel vero metodo, che il Newton, l' Eulero, il Cramer, ed altri dotti Analisti ci hanno segnato.

Nel Capitolo VI. ho trattato della construzione delle superficie curve. Un tal argomento, nella prima edizione della Geometria Descrittiva lo aveva accoppiato alle altre ricerche in cui se ne aveva bisogno; essendo però esso ora divenuto più completo, che allor non era, non poteva tuttavia trovarsi con quelle associato, ed era questo il luogo ove bisognava trattarne. Dopo ciò ne'seguenti Capitoli, cioè VII., VIII. e IX. ho trattato de' contatti delle superficie, distribuendoli nel seguente modo. Nel VII°., dopo alcune ricerche preliminari necessarie all' oggetto, ho risoluti i problemi de' contatti di un piano colle superficie cilindriche e coniche; nell' VIII°. ho trattato de' contatti di un piano con una o più sfere, e con una superficie di rivoluzione; e nel IX°. finalmente de' contatti circolari e sferici. Queste ultime ricerche trattate recentemente con grandissimo sfoggio di speculazioni, e per mezzo di ripieghi complicatissimi, come si potrà vedere nel Supplemento del Signor Hachette alla Geometria Descrittiva del Monge, e nella Corrispondenza della Scuola Politecnica di Francia, si troveranno quì esposte in una maniera assai semplice, e con un metodo geometrico fondato su di una nuova proprietà del triangolo fatta rilevare in esso, per le vie elementari, dal nostro insigne Matematico Signor Nicola Fergola. E per incidenza si troveranno anche in

questo Capitolo dimostrate alcune nuove proprietà de' cerchi e delle sfere che s' intersegano, e risoluto in doppio modo uno de' problemi più importanti sulla piramide triangolare.

Il Capitolo X. concerne la *construzione* dell'intersezione delle superficie curve, cioè cilindriche, coniche, e di rivoluzione. Seguendo un metodo più generale, ed inverso di quello finora tenuto da' moderni Geometri Descrittivi, ho io derivata la construzione dell' intersezione di tali superficie curve con un piano di sito, dall' altra dell' intersezione di ciascuna di esse con una data superficie cilindrica; ed ho anche reso l'argomento di questo Capitolo assai più completo di quello ch' era stato finora: alla qual cosa hanno contribuito alcuni importanti lemmi de' quali trovasi arricchita una tal teoria.

Lo stretto nesso che ha coll' argomento di questo Capitolo la teoria de' determinanti del sito delle linee curve nello spazio, mi ha impegnato a trattar siffatte ricerche nel Capitolo XI., nel quale ho fatta rivivere l'idea delle spirali, che gli antichi considerarono, descritte nella superficie del cilindro, del cono, e della sfera. E nel Capitolo seguente, ch' è il XII°. del presente Trattato ho esposte le principali proprietà della prima delle suddette spirali chiamata cilindrica, o Apolloniana, derivandole dalla sua semplice genesi.

Nè ciò ho fatto per pura speculazione, e come applicazione delle teorie astratte del Capitolo precedente; ma anche pel gran vantaggio che da

questa curva può trarsi, impiegandola convenevolmente, come gli antichi facevano, nella risoluzione de' problemi ipersolidi; e per l'uso che può farsi di essa nelle arti di construzione, e del disegno.

Il Capitolo XIII. ha per oggetto un'altra curva a doppia curvatura, la cui invenzione si appartiene a' tempi nostri, ed è questa l'*epicicloide sferica* di Ermanno: E per dare alle considerazioni geometriche che su di essa distendo, concernenti l'argomento di questo Trattato, quella geometrica esattezza ch'era necessaria, e che invano desideravasi finora nelle opere di què Geometri che di tal curva hanno similmente trattato, ho in doppio modo risoluto il Problema di *dividere un arco o un angolo dato in data ragione*, cioè una volta adoprando la spirale cilindrica, e nell'altra la cicloide Galileana, i quali due metodi elegantissimi per risolvere un tal problema si appartengono a' bei tempi della Geometria nella Scuola del Galilei, essendo l'opera del suo ultimo e dotto discepolo Vincenzo Viviani.

Ad oggetto poi di mostrare di quanta importanza e vantaggio la teoria delle intersezioni delle superficie curve possa riuscire anche nelle ricerche di pura Geometria, ho raccolti nel Capitolo XIV. molti problemi, la cui natura o esigeva assolutamente, o gli rendeva atti ad essere in convenevol modo composti per mezzo dell'intersezione di alcune superficie curve. Un tal metodo di composizione geometrica usato dagli antichi, per la construzione de'

problemi solidi, per mancanza di mezzi onde descriver le curve coniche in un piano, meritava di ricomparire ora alla luce, e più utilmente per la construzione di alcuni problemi lineari. E nell'introduzione a questo Capitolo ho data un' idea generale de' luoghi alla superficie, e sulla natura de' problemi indeterminati a' quali essi sono soddisfacenti, intorno al quale argomento molto si era travagliato dagli antichi, che a noi non è pervenuto.

Tra i problemi risoluti in questo Capitolo ve se ne troveranno sei sulla piramide triangolare, che unitamente a quello già risoluto nel Cap. IX. costituiscono i principali a proporsi su questo solido. E per indicare l' importanza di essi, basta dire che l' insigne analista Signor Lagrange in una sua Memoria inserita negli Atti di Berlino per l' anno 1773, ove si occupò a risolverli per le vie dell' analisi moderna, fortemente si dolse che i Geometri i quali si erano convenientemente occupati del triangolo rettilineo, non avessero poi fatto altrettanto della piramide triangolare, ch' è trà solidi poliedri lo stesso che il triangolo tra i rettilinei. Ma se tal doglianza del Lagrange è giusta, potrebbe anche a lui ragionevolmente imputarsi, ch' egli non abbia soddisfatto ad una tal ricerca come convenivasi, cioè geometricamente, essendo il suo lavoro limitato semplicemente ad offrire gli elementi algebrici onde pervenire all'equazione per tali problemi.

Finalmente si troverà in questo Capitolo riportata l' ingegnosa soluzione di Archita del ce-

lebre problema delle due medie proporzionali , la quale ricomparisce ora in luce libera anche dalla taccia d'immaginaria che il Montucla gli avea data.

Per completare la teoria de' determinanti delle superficie curve nello spazio, ho nel Capitolo XV. impreso a trattare di tali cose per un' altra famiglia di superficie curve, che sebbene generate da una linea retta, non erano però nè cilindriche, nè coniche, cioè di quelle superficie che i Geometri Descrittivi Francesi hanno chiamate *gauches*; che io ne' miei Elementi di Geometria Descrittiva dissi *difformi*, pel carattere che hanno di non conservare nè parzialmente, nè per tutto l' uniformità di curvatura come le coniche e le cilidriche., colle quali convengono nell' aver per generatrice una retta; e che finalmente ora ricompariscono col nome di *plectoidi*, che ad esse avevan dato gli antichi geometri. Ed ecco in breve di tali superficie quelle notizie storiche che riguardano la conoscenza che di esse ebbero gli antichi; il qual tratto storico tanto più dovrà interessare, quanto che finora si è ignorato perfettamente da' Geometri cosa fossero queste superficie *plectoidi*.

Nelle Collezioni Matematiche di Pappo si trova due volte fatta menzione delle superficie *plectoidi*, la prima, cioè, nella Prop. xxix del lib. iv, e l' altra in quella specie di Scolio che segue la Prop. xxx, ov' egli, a proposito del problema della trisezione dell' angolo, entra la seconda volta a parlare de' tre diversi generi in cui gli antichi

geometri distinguevano i problemi. Niuno però finora aveva saputo indicare con fondamento cosa fossero siffatte superficie, ed in qual modo generate. Il Commadini nel suo comento al primo de' luoghi citati manifestamente dice, che Pappo *fa menzione delle superficie plectoidi in appresso*, cioè nell' altro de' suddetti luoghi; ma ch' egli *non si ricordava di aver mai letto cosa esse fossero, e perchè così si chiamassero*. Ed arriva fino a dubitare che tal voce fosse quì un errore, dovendo dire *in cilindroidi* in vece di *in plectoidi*. Ma oltre a che noi mostreremo di quì a poco, che non sia com' egli pensa, si vede chiaro non potersi mai sospettare che Pappo abbia voluto dire *in cilindroidi*, mentre la superficie in cui esiste la linea retta, che si dice dal greco autore essere *in superficie plectoidi*, non ha niente di analogo alla superficie di un cilindro, come indicherebbe la voce *cilindroidi*. E molto meno potrebbe dirsi, come lo stesso Commandini soggiugne, *hoc est in cilindrica superficie*, non trattandosi affatto di superficie cilindrica.

Il Montucla poi, a proposito di tali superficie, dice che Pappo le chiama *plectoides*, cioè *complicatae*, e che non è facile d' indovinare su sì leggiera indicazione quali erano queste superficie, e quali quelle tante linee che il Geometra Filone Tianeo aveva considerate in esse, scrivendone un trattato.

Il fatto sta, che l' uno e l' altro di questi accorti geometri non si è avveduto, ch' esso aveva

innanzi agli occhi, nel primo de' citati luoghi di Pappo, la definizione che cercava; ed io debbo anche ingenuamente confessare, che sono debitore di quest' importante notizia alle sottili considerazioni che ha fatte su tal luogo di Pappo il mio dottissimo collega Signor D. Giuseppe Scorza, col quale io ne aveva fatta parola. Ed ecco in qual modo la cosa procede.

Nel citato primo luogo delle Collezioni di Pappo si parla da questo geometra di una retta, la quale si dice essere *in superficie plectoidi*, ed al momento stesso egli soggiugne: *fertur enim* (*recta*) *per rectam lineam BL*, *et per lineam spiralem positione datam*. Vale a dire ch' egli indica chiaramente, che la superficie in cui si ritrova quella retta, è precisamente quella che vien generata da una linea retta, la quale si appoggia costantemente all' asse di un cilindro retto, ed alla spirale cilindrica segnata sulla di lui superficie, serbandosi sempre perpendicolare a quell' asse stesso, e descrivendo così l' ordinaria superficie curva, che rappresenta quella al di sotto delle scale a lumaca; onde il greco autore ci mostra dalla sua genesi qual fosse la natura di quella superficie curva. E da ciò si vede chiaramente, che per tali superficie curve s' intendevano dagli antichi quelle, che vengono generate da una linea retta, la quale si muove con una data legge radendo una qualunque curva nello spazio. E dal secondo de' succennati luoghi di Pappo si rileva, che questa famiglia innumerabile di superficie curve, per la

quale la Geometria moderna non ha stabilito, che poche considerazioni generali di sito, formava per gli antichi una completa dottrina geometrica. Essi in fatti ne esaminarono la natura di molte, per completare i loro trattati de' luoghi alla superficie; e poi trattarono estesamente delle linee curve segnate su di esse, non solamente da' piani, come dice il Montucla, ma forse anche da altre superficie curve. Noi dunque dopo tanti secoli, e dopo sì grandi progressi delle Matematiche non siamo pervenuti dal canto nostro, che a restituire può dirsi appena la definizione di tal genere di superficie, in considerar le quali gli antichi avevan tanto progredito. E si vorrà negar poi, che a noi manca ancora molto, perchè in questo ramo importante delle Matematiche valessimo gli antichi? Dopo tutto ciò, mi è sembrato a proposito di poter almeno restituire a questa famiglia di superficie il loro antico nome.

Or le poche teorie moderne che le riguardano, si trovano quì non solamente esposte con quell' estensione che si conveniva; ma vi si troverà anche introdotto quel rigore che dovevasi, col dimostrare un teorema fondamentale, che loro appartiene, ed il quale da tutti i moderni si era assunto. E perchè queste tali ricerche non restassero senza una qualche geometrica applicazione, ho trattato nel Cap. XVI. di que' solidi ne' quali la sezione perpendicolare all' asse è un triangolo rettilineo, e specialmente del cono-cuneo di Wallis; e ciò che intorno ad esso ho fatto, si potrà facil-

mente estendere all' intera famiglia de' poc' anzi detti solidi tra i quali esso è compreso. Ed a questo proposito ho fatto anche rilevare alcune importanti verità intorno alle sezioni prodotte nelle superficie cilindriche da' piani.

Nel Capitolo XVII. ho impreso a considerare un altro solido, che mentre è un vero solido di rivoluzione, non essendo che il *cilindroide* del Wallis, è però suscettibile di una genesi analoga alle superficie *plectoidi*. E per mezzo delle teorie che stabiliremo su di esso ci apriremo la strada alla soluzione data dal Signor Monge del Problema di *tirare per una retta di sito un piano tangente una data superficie di rivoluzione*, la qual soluzione, elegante per la sua composizione geometrica, aveva bisogno di esser resa più facile e chiara per l' analisi geometrica corrispondente; il qual motivo forse era stato quello che aveva indotto la maggior parte de' Geometri Descrittivi a trascurare nelle loro instituzioni di questa scienza il suddetto problema, ch' è il principale della teorica de' piani tangenti le superficie curve.

Nel Capitolo XVIII. ho comprese alcune generali considerazioni sullo sviluppo delle superficie curve, esponendo le condizioni geometriche di cui debbono essere fornite, perchè ne sieno capaci. Ed in seguito di ciò ne ho fatta una conveniente applicazione allo sviluppo delle superficie cilindriche e coniche, col mostrare in qual modo su ciascuna delle suddette superficie sviluppate si possa esibire una qualunque curva già segnata nella su-

perficie proposta. Finalmente, ad oggetto di mostrare anche qual uso geometrico possa farsi delle presenti ricerche, ho recata in questo luogo una terza soluzione del problema di dividere un angolo rettilineo in data ragione, la quale è pure del Viviani, ed eseguita per mezzo della superficie di un determinato cuneo cilindrico sviluppata.

Terminata in tal guisa, per quanto convenivasi, l'esposizione delle generali teoriche di sito, ed una loro conveniente applicazione, ho creduto a proposito di dovermi rivolgere a' metodi particolari inventati pel risolvimento de' problemi di questo genere. In una materia sì difficile ed incompleta, qual' è quella del sito, non lice lasciar nulla de' tentativi fatti. Ho dunque impiegato il Cap. XIX. nell' esposizione di un nuovo metodo del Signor Fergola, detto di *conversione*, atto a risolvere non pochi problemi di sito, estraendolo da una Memoria da lui presentata, su questo importante argomento geometrico, alla Reale Accademia delle Scienze di Napoli, nell' anno 1786., ed inserita nel primo volume degli atti di questa pubblicati nel 1788. In seguito ho nel seguente Cap. XX raccolti molti problemi di sito risoluti con questo metodo dallo stesso Geometra, ed appartenenti a' primi due generi ne' quali ha egli classificata questa numerosissima famiglia di problemi.

Dopo ciò nel Cap. XXI ho distribuiti que' Problemi di sito che restii al metodo sopraccennato, possono però ricevere un' elegante soluzione per mezzo di alcuni geometrici lemmi, de' quali

non senza ragione si veggono abbondare le opere degli antichi; e del qual genere doveva essere quell' immenso materiale che a' Geometri era apparecchiato ne' tre libri de' porismi di Euclide, ond' è ch' essi gli avevano come *Opus artificiosissimum in analysin difficillimorum problematum, eorumque generum, quorum immensam multitudinem praebet natura* porismatum. Tra gli altri problemi di questo Capitolo, vi si troverà risoluto, in due eleganti maniere diverse; quello d'*inscrivere in un cerchio un triangolo, o anche un poligono qualunque, sicchè i lati di esso passassero per altrettanti punti dati*, nel risolvere il quale s' impegnarono grandemente i principali Geometri del passato secolo, come sarà detto a suo luogo, insieme con quello analogo che propose l' Eulero sulla superficie della sfera, e con altri affini.

Il Cap. XXII è poi destinato ad un altro metodo anche del Fergola, detto di *Trasferimento*, che fece egli noto alla stessa Accademia nel 1787, e che riesce utilissimo nel risolvere molti altri problemi di sito.

Finalmente nel Cap. XXIII vi ho compresi tanti problemi di sito del genere di quelli che venivano trattati ne' due libri *de Inclinationibus di* Apollonio Pergeo, ma universalizzati, e che il Signor Fergola, il quale gli ha elegantemente risoluti, in modo da occultare anche la loro natura trascendente, ha chiamati *delle Applicazioni* (*Vegg. i tre opuscoli di questo Geometra riguardante un*

tale argomento , che trovansi inseriti nella Raccolta da me pubblicata nel 1811). Mi ha spinto a ciò fare , non solamente la natura di sito ch' essi hanno ; ma anche la considerazione che possonsi avere come un' ubertosa ed utile raccolta di lemmi , onde risolvere moltissimi difficili problemi di posizione anche ipersolidi , ed in forma di problemi piani .

Mi resta a dire anche qualche cosa di alcune note aggiunte in fine della presente opera , le quali mentre che contengono ricerche affini agli argomenti trattati in qualche capitolo di essa , non dovevano però, a rigore di metodo, aver quivi luogo. Tal è , per esempio , la nota sul cilindroide de Wallis nella quale si recano diverse dimostrazioni del teorema proposto dal Parent , per la misura di questo solido , ordite nella Scuola del Signor Fergola .

Ecco tutto quello che io ho fatto in quest' opera , che ora presento al severo giudizio del Pubblico . I Geometri decideranno del merito del mio lavoro ; e gli Artisti dotti dell' utilità , che da esso si può trarre , con più fondamento che da altre opere di simil genere finora pubblicate .

Non mi sono permessa alcuna applicazione alla pratica , per timore di non essere troppo superficiale , o anche inesatto , mancando di quelle nozioni di mestiere , che dovevano formare la base di una tale applicazione ; e non volendo altronde , nè permettendomelo le mie assidue occupazioni , d' istruirmi pienamente in cose ch' erano

aliene da' miei studj: ho quindi lasciata questa parte a coloro che versati nella moderna Geometria di Sito, conoscono ancora le arti di construzione alle quali essa può esser vantaggiosamente applicata.

Dopo tutto quello che ho finora detto circa la distribuzione dell'opera, non debbo omettere di dir anche qualche cosa del metodo del quale mi sono servito nelle ricerche geometriche che vi si contengono. Siccome esse appartengono alla Geometria di Sito, ognuno perciò comprende che il mezzo da ben riuscirvi era il metodo degli antichi; ed io avrò abbastanza dimostrata quest' asserzione, per coloro, che non sono atti a sentirne la ragionevolezza da loro stessi, recando quì quanto vien detto sulla maniera di trattare i problemi geometrici dal dotto Geometra Inglese Samuele Horsley, in fine della sua restituzione de' libri *de Inclinationibns* di Apollonio: *Quam vero inconsulto faciunt, qui in rebus geometricis veterum Analysi posthabita ad Algebram semper confugiunt, is demum sentiet, qui Ghetaldi constructiones cum hisce nostris contulerit. Figurae scilicet quot quot sunt lineis constant vel pluribus, vel curva fortasse una. Linearum vero plurium, ut et partium ejusdem curvae variarum, relatio duplex est, quantitate enim distinguuntur, et situ. Meras quantitatis relationes, meras autem dico, quae ex situ nullo modo pendent, optimo certe compendio Algebra expendit, et ex notis ignotas mira facilitate promit. Situs linearum varios dignoscere, et cum*

alias omnes, tum et ipsius quantitatis relationes, si quae ex situ oriundae, vel lineis ipsis, vel figuris quas lineae claudunt, intercedunt, explorare id, ni fallor, Geometriae munus est. In problematibus plerisque solutio ex utraque relatione pendet, situs dico et magnitudinis, vel compendiosius saltem, ex utraque junctim quam ex hac vel illa seorsim efficienda est. Positiones vero linearum diversas, intersectiones, contactus, angulos, flexuras, et quae plurima inde forte consequantur, quae vix fieri potest, ut prudentiorem paullo Geometriam, vel adeant, vel fugiant, calculus saepissime praeterire solet. Unde haud raro evenit, ut qui aequationibus concinnandis nimium se delectari sinunt, exitu operis, quod brevi sane, et nullo fere negotio conficiunt, in constructiones aut nullas plane incidunt, aut perplexas adeo, et laboriosas, ut omni prorsus utilitate careant. Algebrae autem is demum legitimus erit in Geometria usus, si in rebus calculi solis adhibeatur. Neque tamen Geometris auctor essem, ut eo studium atque artem potissimum impendant, ut ad calculum rem quamque propositam deducant. Immo contrarium suadeo. Constructiones enim simplicissimas, et facillimas esse quae ex positionibus partium figurae petitae sunt, multiplex me experientia docuit. Sed cum indagine rite instituta, omnibus datorum, et quaesitorum, tam situs, quam magnitudinis, relationibus diligenter perpensis, et tandem sua quasi

sponte res devenerit, ut mero calculo ulterius prosequenda sit, nollem sane, coeca adeo veneratione, antiqua complecti, ut in tali negotio recentiora Algebrae compendia ingratus spernerem. Neque minus imperite et inepte faciunt, meo quidem judicio, qui in rebus calculi Algebra uti nolunt, quam qui in rebus graphicis, Geometria, id est graphices scientia, multum valere jussa, maxima quaeque problemata mero calculo aggressi, Geometrarum munere praeclare sedefunctos existimant, dummodo aequationes utcunque concinnaverint.

Ma se l'Horsley voleva mostrar la superiorità della Geometria sull' Analisi nelle soluzioni de' Problemi delle Inclinazioni, col semplice confronto di quelle ch' esso ne aveva recate, per le vie della Sintesi a quelle poche, che coll' Analisi moderna ne aveva date il nostro Ghetaldo, le quali non pertanto conducevano a risultati construibili; che non dovremmo dire noi al presente, che si pensa, che una quistione geometrica non sia ben risoluta, se non quando meno di Geometria in essa vi appare; ond' è poi che la sua construzione riuscendo difficile a ravvisarsi, non più vedendosi le tracce dell' orditura geometrica inviluppata in mezzo ad analitiche espressioni delle locali del Problema, si abbandona la risoluzione di questi alla semplice equazione, trasgredendo quel precetto delle greche Scuole, cioè che *Problema est propositio in qua aliquid proponitur faciendum et construen-*

dum (*). E talvolta nè pur si perviene all'equazione, spaventati dalla lunghezza di essa, prodotta dal frequente e necessario uso delle eliminazioni, o pur una se ne ottiene, dalla quale mai più la natura del Problema, se non per lunghi giri, e metafisiche ricerche non si può rilevare. E di tutto quello che poc' anzi ho detto sono varj gli esempj nelle opere de' moderni colti autori della Geometria Analitica. A costoro che sono fuori del cammino geometrico potrei ricordare, che il sommo Eulero non pensava com' essi, e che al contrario forte insisteva che un problema fosse compiutamente construito, e con eleganza, per dirlo risoluto. In fatti nella 2ª. Parte del volume dell' Accademia di Pietroburgo per l' anno 1780, troviamo detto dal Lexell, che quest' insigne Geometra, parlando della soluzione del Problema del Cramer fatta colla moderna analisi dal Lagrange, si duole, che le espressioni alle quali questo sommo Analista, con una destrezza veramente ammirabile, e degna del suo perspicace ingegno, era pervenuto, non erano forse construibili. Ed eccone in comprovazione le parole stesse del Lexell: *Cum illustris Eulerus de hoc problemate sermonem injiciens, dixisset se dubitare, utrum ista solutio analytica illustris de la Grange, quam in volumine Actorum Berolinensium, pro anno 1776 recensuit cel. Castillon, ad aliquam expeditam, et concinnam construcionem geometri-*

(*) Pappo *Collect. Math. Lib. III. in princ.*

cam perducat, *id quidem me permovit ut disquirerem*, *utrum ejusmodi constructio inde derivari possit*, *nec ne*. Ed altrove lo stesso Eulero in un altro volume della citata Accademia, per l' anno 1790, in occasione della soluzione ch' egli ivi dà del Problema de' tre cerchi da farsi toccare da un quarto, ripiglia: *Verum quia hoc Problema est geometricum*, *non tam calculus numericus*, *quam constructio geometrica desiderari solet*; il che se avessero veduto alcuni moderni analisti, non si sarebbero azzardati a produr fuori le loro soluzioni del suddetto problema, come han fatto.

E tutto il fin qui dichiarato potrà bastare a giustificare la ragionevolezza del metodo da me impiegato nella presente opera, per le già dette geometriche ricerche.

Quantunque però, come si è detto, le ricerche di sito sieno riluttanti a' metodi della moderna Analisi; pur tuttavia la teorica de' luoghi geometrici, che con questi resta mirabilmente trattata, e gli sforzi grandissimi, che si sono fatti da' moderni Analisti, per sottomettere quelle al vasto dominio dell' Algebra, meritano di essere conosciuti da chiunque coltiva le Matematiche a' dì nostri. È perciò, che mi sono impegnato a raccorre tutte quelle ricerche analitiche di sito che meritano di esser conosciute, perchè contribuiscono al perfezionamento delle Matematiche, in un altro trattato, che col titolo di *Saggio di Geometria Analitica di Sito* pubblicherò in appresso.

GEOMETRIA
DI SITO
SUL PIANO, E NELLO SPAZIO.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

1. *Def.* I. Lo spazio è un'estensione di tre dimensioni illimitata, e similare.

2. *Scol.* Da questa definizione dello spazio, e dall'altra del piano data da Euclide, considerandolo però come interminato, risulta, che le parti di un piano, e quelle dello spazio sieno indiscernibili; che perciò niuna delle cose esistenti in ciascuno di essi si potrà distinguere rapportandola alle loro parti; o sia queste non potranno mai essere un mezzo da far distinguere l'uno dall'altro due oggetti geometrici identici, che si trovino in essi.

3. *Def.* II. Per *sito* o *posizione* di un oggetto geometrico, in un piano, o nello spazio, s'intende la determinata ed invariabile maniera di esistere di un tal oggetto, per rapporto ad altre cose geometriche, che sono già stabilite nel piano stesso, o nello spazio medesimo.

Siffatta maniera di esistere, appartenendo a quel tale oggetto, non può competere, che ad esso solo, per rapporto alle cose geometriche fissate; e quindi è

incomunicabile a qualunque altro oggetto non suppongasi essere nello stesso luogo del proposto.

4. *Scol.* Le cose geometriche fissate, per mezzo delle quali si vuol conoscere il sito di un oggetto geometrico; convien che sieno le più semplici ch' è possibile; per cui se trattasi di determinare il sito di una cosa geometrica nel piano, non possono essere che punti, o linee rette; e trattandosi di determinarlo nello spazio, possono essere anche piani.

Similmente gli oggetti, che si vogliono determinare, cioè de' quali si vuol conoscere il sito, se ciò è nel piano, possono essere o altri punti, o linee, o figure piane di qualsivoglia specie: e nello spazio possono inoltre essere anche superficie di qualunque solido o pur linee risultanti dall' intersezione di queste.

5. *Def.* III. Un oggetto geometrico si dirà *Dato di sito* in un piano, o nello spazio, se siasi geometricamente definita l' invariabile sua maniera di esistere cogli altri oggetti fissati nel piano stesso, o nello spazio; e quindi se esso si può geometricamente esibire,

6. *Def.* IV. Gli oggetti fissati nel piano, o nello spazio, da' quali risulta il sito di un altro, diconsi i ***determinanti*** del sito di questo

CAP. I.

DE' DETERMINANTI DEL SITO DE' PUNTI, DELLE LINEE, E DI ALCUNE FIGURE NEL PIANO.

PROP. I. TEOR.

7. *Se sono fissati due punti in un piano, sarà dato il sito, e la grandezza della retta che gli congiugne.*

Ciò è manifesto dalla precedente definizione 3, e dal postulato primo di Euclide.

PROP. II. TEOR.

8. *Se è dato di sito un punto in un piano, sarà anche data di sito la circonferenza di quel cerchio, che ha per centro un tal punto, ed un raggio di data grandezza.*

Imperocchè non potendosi descrivere, con quel centro ed intervallo, che un solo cerchio; è chiaro, che la circonferenza di questo ha, per rapporto al suo centro, una determinata maniera di esistere, la quale è incomunicabile a qualunque altra circonferenza si descrive col centro stesso; che perciò essa dovrà esser data di sito (*def.* 3.).

PROP. III. TEOR.

9. *Se è dato in un piano il sito di due linee, che s' intersegano; saranno anche dati di posizione i punti del loro scambievole incontro.*

Ciò è chiaro dalle definizioni 2. e 3.; ed è poi stato assunto più volte dall' accuratissimo Euclide ne' suoi Elementi, e lo è continuamente da tutt' i Geometri nelle construzioni de' Problemi, che da essi si risolvono.

PROP. IV. TEOR.

10. *Se in un piano sieno fissati due punti; sarà dato di sito quell' altro punto, che serba distanze date da ciascuno di essi.*

Poichè essendo date le distanze di questo terzo punto da ciascuno de' fissati, saranno date di sito le circonferenze di que' cerchi, che hanno per centro i punti fissati, e per raggi rispettivi le distanze date (*p*.2.), in ciascuna delle quali, com' è chiaro, dev' esistere quel terzo punto: che perciò questo sarà uno di que' due ne' quali s' intersegano tali circonferenze; e quindi sarà dato di sito (*p* 3.).

11. *Cor.* Adunque sarà dato il sito di un punto in un piano, per rapporto ad una linea retta, che si è in questo stabilita, se tal punto serba distanze date da ciascuno di due altri, che si fissano in quella retta.

12. *Scol.* I due punti dati, e le distanze date sono i determinanti del sito di un punto sul piano (*d*.4.). Queste distanze debbono però essere tali, che i cerchi con esse descritti, e che sono le locali del punto da determinarsi, o s' interseghino, o almeno si toc-

chino ; il che è facile a rilevarsi quando abbia luogo.

In appresso non si farà menzione di questa suscettibilità de' dati , quando essa si rileva con facilità dagli Elementi .

PROP. V. TEOR.

13. *Se è dato in un piano il sito di un punto per rapporto ad un linea retta fissata in esso ; dovrà essere anche dato : I. il sito e la grandezza della perpendicolare , che da tal punto si abbassa su quella retta ; II. il sito della parallela che a questa si tira per un tal punto ; III. ed il sito e la grandezza di qualunque retta s' inclina alla proposta in un angolo dato , e passa per lo dato punto .*

Part. 1. Imperocchè se , centro A, il punto dato (*fig.* 1.) , intervallo qualunque AD , (il punto D si suppone preso al di là della retta BC) si descriva il cerchio EFD ; saranno dati di sito i punti E , F ne' quali s' intersegano il cerchio e la retta (*p.*3.) ; e quindi di sito , e di grandezza la retta EF (*p.* 1.) ; e perciò di sito il suo punto medio G. Laonde sarà data di sito , e di grandezza la retta AG, che unisce i due punti dati A , G (*p.*1.) , la quale è perpendicolare alla BC (14. *El.* 1.).

Part. 2. Inoltre poichè dal punto A non si può condurre alla AG , che una sola perpendicolare AL ; perciò sarà dato il sito di questa per rapporto alla AG (*d.* 3.) , e quindi per rapporto alla BC , alla quale essa AL è parallela .

Part. 3. Ed inclinandosi da A sulla BC una retta AH in un dato angolo ; sarà data quell' unica porzione di cerchio, che si può descrivere sulla AG , da una delle sue parti , capiente un tal angolo (*d.* 3.) :

quindi sarà dato il sito del punto H, ove la circonferenza di tal segmento intersega la BC (*p.* 3.); e perciò la retta AH sarà data di sito, e di grandezza (*p.* 2.).

PROP. VI. TEOR.

14. *Se in un piano sieno fissate due rette, le quali s' inclinino; sarà dato l' angolo che comprenderanno incontrandosi.*

Poichè sono date di sito le rette AB, AC (*fig.*2.) che s' intersegano, sarà anche dato di sito il punto A ov' esse s' incontrano (*p.* 3.): laonde se si prenda in una di esse AC la parte AD di una data grandezza; sarà dato di sito il punto D, e perciò anche di sito sarà data quell' unica perpendicolare DE, che da tal punto si può elevare sulla AC, verso quella parte di essa ov' è l' altra retta data AB. Adunque sarà anche dato il punto E (*p.*3.); e quindi la DE avrà una data grandezza. Che perciò nel triangolo AED essendo dati i due lati AD, DE intorno all' angolo retto in D, si potrà esso construire, e così resterà determinato l' angolo in A, ch' è quello compreso dalle rette date di sito.

15. *Scol.* Anche la conversa di questa Proposizione è vera, cioè: che *se due rette comprendonoun dato angolo; dovrà l' una esser data di sito per rapporto all' altra*; vale a dire dato il sito dell' una, sarà anche dato quello dell' altra: e la ragione è chiara. Poichè nessun' altra retta tirata per lo vertice di quell' angolo, e verso la parte stessa, per rapporto ad uno de' lati di esso, ov' è l' altro lato, può comprendere con quello l' angolo stesso, che vi comprendeva questo.

PROP. VII. TEOR.

16. *Se in un piano sieno fissate due rette ad angolo; sarà dato il sito di ogni punto, di cui è data la distanza da ciascuna di esse.*

Sieno AC, AB tali rette (*fig.* 3.), e dal punto dato A, ove s'intersegano, s'intendano elevate su di esse respettivamente, e dalla stessa parte, le perpendicolari AD, AE uguali la prima alla distanza, che un punto si suppone serbare dalla AB, e l'altra a quella che lo stesso serba dalla AC; saranno dati di sito i punti D, E: laonde anche di sito saranno date le parallele DM, EN tirate per que' punti alle AB, AC respettivamente (*p.* 5. *part.* 2.); e perciò sarà dato per rapporto alle AB, AC il sito del punto X, ove queste s'intersegano (*p.* 3.): il qual punto è il proposto.

17. *Scol.* Se l'angolo delle AB, AC fosse retto, le AD, AE verrebbero ad esser tagliate vicendevolmente sulle AC, AB; ond'è che l'esibizione del punto proposto riuscirebbe più semplice: che perciò tutte le volte, che le due rette ad angolo alle quali si rapporta un punto, di cui si vuole esibire il sito, si possono prendere ad arbitrio, giova prenderle ad angolo retto.

18. *Scol.* 2. Queste rette di sito AB, AC, poste ad angolo, diconsi ordinariamente *assi*, o *direttrici*; e si dà loro il nome di *ortogonali* o *obbliqui*, secondo che comprendono un angolo retto, o pure obbliquo.

PROP. VIII. TEOR.

19. *Se sieno dati tre punti in un piano, sarà dato il sito e la grandezza di quel triangolo, che si ottiene congiugnendoli; e sarà di più data la sua specie*, cioè gliesene potrà costituire un altro simile.

Imperocchè essendo dati di sito que' tre punti; sarà data di sito, e di grandezza la retta che unisce due di essi (*p.* 1.), come anche la grandezza della perpendicolare che si abbassa su tal congiungente dal terzo punto (*p.*5.*part.*1.): e queste due rette sono la base e l' altezza del triangolo che si ottiene congiugnendo i tre punti dati; che perciò la sua grandezza sarà data (37. *El.* 1.): e sarà anche dato il sito di esso; poichè è dato quello di ciasun suo lato. E siccome questi comprendono angoli dati (*p.*6.); si potrà perciò construire un triangolo simile al predetto; e quindi esso sarà anche dato di specie.

20. *Cor.* Adunque *sarà dato di sito, di grandezza, e di specie quel rettilineo, che risulta dal congiugnere più punti dati in un piano, tre de' quali non sieno mai per dritto, ciascuno una sola volta con un altro*: poichè si è dimostrato che di sito, grandezza e specie sono dati que' triangoli ne' quali un tal rettilineo si divide.

SCOLIO GENERALE.

21. Le poche verità che si sono stabilite sulla teorica del sito nel piano de' punti, delle linee, e di quelle figure di cui trattasi negli Elementi della Piana, sono sufficienti a far acquistare un' esatta nozione del sito nello spazio, di cui or ora passeremo ad occuparci; che perciò eccederemmo inutilmente il nostro sco-

po rapportandone delle altre , che da queste si derivano, e che sono necessarie ad apprendersi da coloro, che volessero occuparsi con successo della soluzione de' problemi così detti di sito, difficili a risolversi con l' antica analisi ; ma molto più riluttanti a' metodi de' moderni, che spesso riescono infruttuosi (*).

(*) Chiunque si ha formata un' idea della diversa natura de' problemi geometrici, e che si sarà anche esercitato in risolverne, dovrà esser persuaso della difficoltà che s' incontra in trattare coll' analisi algebrica anche que' problemi di sito, de' quali facili ed eleganti soluzioni si possono ottenere, per mezzo dell' analisi degli antichi. Del resto per convalidare la mia asserzione, chi non sa quanto il Leibnitz abbia fatto per istabilire l' analisi de' siti, e quanta giusta ragione abbia avuta dopo ciò il perspicacissimo d' Alembert nel dolersi, che malgrado i tentativi di sì grand' uomo nulla o pochissimo si era conseguito per l' oggetto cercato. E quantunque posteriormente il La Grange e molti altri insigni analisti moderni siansi validamente cooperati, per sottoporre, anche per questa parte, la Geometria all' Algebra ; i Geometri però non potranno esser paghi interamente di queste loro fatiche, se i risultamenti a' quali conduce la modernissima Analisi di Sito, non sieno capaci di una facile ed elegante costruzione, come quelli che in simili casi offre la Geometria.

CAP. II.

DE' DETERMINANTI DEL SITO DE' PUNTI, DELLE LINEE RETTE, E DEGLI ANGOLI NELLO SPAZIO.

22. Finora si è veduto in qual modo poteva esibirsi il sito di alcuni oggetti geometrici in un piano, conviene ora passare a determinare in qual modo si possa definire il loro sito nello spazio; e questo problema è più difficile del precedente, perchè lo spazio non potendosi rappresentare in rilievo, o almeno non conducendo di ciò fare a' bisogni delle arti, conviene ritrovar de' ripieghi, per avere in disegno sopra di un foglio di carta, o sopra di una stess' aja i determinanti del sito di quelli oggetti geometrici, che debbono esser dati nello spazio.

Questa nuova ricerca, che tratteremo nel presente Capitolo, ed in quello che segue; e che poi applicheremo negli altri, è stata ultimamente ridotta in sistema scientifico, ed ha formato un nuovo ramo di Geometria chiamato *Descrittiva* da' Signori *Monge*, e *Lacroix*.

23. *Def.* v. Per *projezione* di un punto su di un piano qui intendiamo l' incontro della perpendicolare abbassata da quel punto su questo piano, che dicesi *piano di projezione*. E la grandezza di una tal perpendicolare dicesi *altezza* del punto sul piano; poichè in effetto essa misura la distanza di quello da questo.

24. *Cor.* Tutt' i punti della perpendicolare ad un piano hanno su di questo la stessa projezione.

25. *Def.* vi. Un piano, ch' è ad angolo con un altro

si dirà *abbattuto* con questo, se giri tanto intorno alla loro comune sezione, finchè giunga a formare con l'altro un piano solo.

PROP. VIII. TEOR.

26. *Le projezioni di tutt' i punti di una retta, sopra un piano, sono allogate in un' altra retta.*

Imperocchè tutte queste projezioni vengono ad essere allogate nell' intersezione del piano di projezione con quell' altro perpendicolare ad esso, che passa per la retta; e quindi in un' altra retta (4. *El.* XI).

27. *Cor.* 1. Tutte le rette tirate in un piano perpendicolare ad un altro hanno, per loro comune projezione su questo, l' intersezione di tali piani. E quel piano si suole ordinariamente chiamare *piano projettante* delle rette, che in esso si tirano.

28. *Cor.* 2. E per determinare le projezioni di una retta su di un piano, basta determinare su di questo le projezioni di due punti di essa. Adunque

29. *Def.* VII. Quella retta che unisce su di un piano le projezioni di due punti esistenti nello spazio, è la projezione su questo piano della retta, che passa per quelli.

30. *Cor.* Quindi se la retta proposta a projettarsi su di un piano è perpendicolare a questo; la sua projezione su di esso sarà quel punto ove l' incontra.

31. *Def.* VIII. Una retta si dirà *parallela ad un piano*, s'è parallela alla sua projezione su questo.

32. *Cor.* 1. Adunque se per un punto, ch' è in un dato piano, si tiri la parallela ad una retta parallela al piano; tal retta tirata dovrà giacere in quel piano.

33. *Cor.* 2. Una retta terminata parallela ad un piano adegua la sua projezione su questo.

34. *Scol.* È facile l'accorgersi, che il concetto della precedente definizione possa estendersi, e quindi aversi una retta per parallela ad un piano, s'essa è parallela a qualunque retta tirata in questo.

SCOLIO GENERALE.

35. Per le seguenti ricerche supporremo stabilito un piano nello spazio come termine di rapporto degli oggetti geometrici, che in questo si vogliono fissare, cioè de' quali si vuol determinare il sito. Una tal supposizione non è immaginaria, ma reale: poichè in natura si può sempre prendere per questo piano l'orizzonte di un dato luogo della terra. Quel tal piano suole perciò chiamarsi *orizzontale*; e dicesi *verticale* ogni altro piano perpendicolare ad esso, e del quale è dato il sito, com' è chiaro, se è data semplicemente la sua comune sezione col piano orizzontale. Parimente si dovrà avere come un piano fissato nello spazio, e che si potrà perciò anche prendere come termine di rapporto degli oggetti, che si vogliono in questo rappresentare, ogni altro piano di cui è data la comune sezione col primo, e l'angolo sotto cui s'inclina quello a questo.

Inoltre la projezione di un punto, ch' è nello spazio, sul primo di tali piani, si dice *projezione orizzontale*; e s'essa è sul piano verticale, si chiamerà *projezione verticale*.

PROP. IX. TEOR.

36. *Se è data la projezione di un punto, ch' è nello spazio, sopra un piano di sito, e l' altezza di esso su questo; sarà dato il sito di un tal punto.*

Imperocchè un tal punto non potrà essere, che quel solo, che vien rappresentato dall' estremo della perpendicolare innalzata sul piano di sito dalla projezione data in esso, ed uguale all' altezza data; che perciò dovrà esser dato di sito (*d.* 5.).

PROP. X. TEOR.

37. *È dato il sito di un punto nello spazio, se ne sono date le projezioni su due piani, che s' incontrano.*

Rappresenti A (*fig.*4.) un punto, di cui sieno date la projezioni *a*, *a'* su i piani LN, LP, che s' intersegano nella retta LM. È chiaro che se per le A*a*, A*a'*, che sono le altezze rispettive di quel punto su que' piani di projezione, s' intenda passare un piano, questo dovrà esser perpendicolare a' due LN, LP (18. *El.* XI.); e quindi le sue comuni sezioni A'*a*, A'*a'* con questi, dovendo essere anche perpendicolari alla LM (19. *El* XI.), comprenderanno l' angolo d' inclinazione dell' un piano all' altro (*def.* 4. *El.* XI.). Adunque nel quadrilatero A*a* A'*a'* vi saran dati tutti gli angoli, e di più i lati A'*a*, A'*a'* intorno ad un di questi: che perciò esso potrà geometricamente descriversi; ed in tal modo verrà ad esibirsi la A*a*, o la A*a'*, cioè l' altezza del punto A su di uno dè piani di projezione. Laonde questo punto dovrà esser dato di sito (*p.* 9.).

38. *Cor.* 1. Se mai i piani di projezione LN, LP fossero ortogonali, in questo caso sarebbe retto l' angolo *a* A'*a'*; e quindi un rettangolo la figura A*a*A'*a'*; adunque sarà A*a* uguale ad *a'*A', ed A*a'* uguale ad *a*A', cioè: *L' altezza del punto A su di uno de' piani ortogonali di projezione, è quanto la perpendicolare, che dalla pro-*

jezione di esso sull' altro di tali piani si abbassa sulla comune sezione loro. Laonde in questo caso resta facilitata moltissimo l'esibizione del dato punto da' suoi determinanti espressi nel presente teorema.

39. *Cor.* 2. E quindi se i punti A, C sieno ugualmente alti sul piano di projezione LN, anche le loro projezioni a', c' sull' altro di tali piani dovranno essere ugualmente alte sulla LM: che perciò la retta $a'c'$ che le unisce sarebbe parallela ad essa LM; vale a dire, che: *Se una retta è parallela ad uno de' piani ortogonali di projezione; la sua projezione sull' altro di questi, è parallela alla comune sezione loro*.

40. *Scol.* 1. Volendosi trasportare la projezione a'' (*fig.* 5.) di un punto A, da un piano NP obbliquo al piano LN, su cui, del punto stesso n'è data l'altra projezione a, ad un piano LP perpendicolare a questo: bisognerà prima determinare la Aa, per mezzo della costruzione esposta nel teorema, ed indi tirare da a la aA' perpendicolare alla LM, ch' è la comune sezione de' piani LN, LP; poi elevare su di essa LM, dal punto A e nel piano LP, la perpendicolare A'a' uguale alla Aa; sarebbe a' la projezione cercata.

41. *Scol.* 2. Che se la projezione a'' del punto A vogliasi trasportare, dal piano NP obbliquo all' altro LN, sull' altro piano LP che s' inclini allo stesso LN in un angolo dato Q: bisognerà anche determinar prima la Aa, poi abbassare da a sulla ML, ch' è l' intersezione di questo secondo piano di projezione con lo stesso LN, la perpendicolare aA'; ed indi presa su di un lato dell' angolo Q la QR uguale a questa aA', elevarli dal punto R la RS quanto la aA, e dal punto S abbassare sull' altro lato dell' angolo stesso la perpendicolare ST: si rileverà facilmente, che se dal punto A' si elevi sulla ML, e nel piano LP, la perpendi-

colare Aa' uguale alla QT; il punto a' sarà la projezione del punto A su questo piano.

Ed ognuno potrà rilevare da quello che si è detto in questi due scolj, e nella def. 7., in qual modo si possa trasportare da un dato piano di projezione su di un altro la projezione di una retta.

42 *Cor.* Da' due Scolj precedenti si rileva anche, in qual modo data la projezione di un punto su di un piano, e la sua altezza su questo, si possa determinare la projezione di un tal punto sù di un altro piano posto ad angolo con quello.

PROP. XI. TEOR.

43 *È dato il sito di un punto nello spazio, se sono date le distanze, ch' esso serba da tre piani che s' incontrano scambievolmente sotto dati angoli.*

Imperocchè essendo date le distanze Aa, Aa'' (*fig.* 5), che il punto proposto A serba da' due piani LN, NP i quali s'inclinano in un angolo dato; nel quadrilatero $AaA''a''$, che si ottiene abbassando, dalle projezioni a, a'' del punto A su que' piani, le perpendicolari aA'', $a''A''$ sulla loro comune sezione NM, ed intendendo congiunte le Aa, Aa'', vi saran dati tutti gli angoli, ed i lati intorno all' angolo A''; che perciò esso si potrà geometricamente descrivere, e quindi sarà data la aA''. Similmente si dimostrerà, ch' essendo date le distanze Aa, Aa', che lo stesso punto A serba da' due altri piani dati NL, LP, sia pur data la aA'. Adunque saranno date le distanze che il punto a serba dalle due rette ad angolo MN, ML; e quindi sarà dato il sito di un tal punto nel piano LN (*p.*7.). Laonde del punto A, ch' è nello spazio, n' è data la projezione a su di un piano LN di

sito: è poi anche data l'altezza aA di esso su tal piano; perciò il suo sito sarà dato (*p.* 9.).

44. *Cor.* Dalla determinazione del presente Teorema si rileva, che: *Se sono date le distanze che un punto nello spazio serba da due piani che s' inclinano in un angolo dato, saranno anche date le distanze che le projezioni di que' punti su questi piani serbano dalla loro comune sezione.*

PROP. XII. TEOR.

45. *Se sono date, su di un piano, le projezioni di due punti, e le loro altezze rispettive su tal piano; sarà dato il sito della retta che passa per essi.*

Imperocchè sono dati di sito due punti pe'quali essa passa, e per gli quali non ve ne passa che una sola; che perciò tal retta dovrà essere data di sito (*d.* 5.).

PROP. XIII. TEOR.

46. *Una retta è data di sito nello spazio, se sono date le sue projezioni su due piani che s' incontrano.*

Poichè, si prendano in una delle projezioni $a'b'$ (*fig.* 4) di tal retta nel piano LP i punti a', b', da' quali si abbassino sulla LM le perpendicolari $a'A'$, $b'B'$; poi da' punti A', B' si elevino alla stessa LM, nell' altro piano LN, le perpendicolari $A'a$, $B'b$ sino alla projezione ab della retta stessa, in questo piano: i punti a, b rappresenteranno le projezioni sul piano LN di que' punti della retta proposta, che avevano per loro rispettive projezioni sull' altro piano di projezione le a', b'. Adunque essendo date di ciascuno di tali punti le rispettive

projezioni su due piani che s' incontrano, ne sarà dato il sito (*p.* 10.); e quindi sarà data di sito la retta che passa per essi (*p.* 12.).

SCOLIO GENERALE.

47. Si è veduto ne' num. 36, 37, 45, 46, che i determinanti di un punto nello spazio sono, o la sua projezione su di un piano di sito, e l' altezza sua su di questo, o pur le projezioni su due piani ad angolo. Similmente, che i determinanti di una retta nello spazio sono, o le projezioni di due suoi punti su di un piano, e le loro altezze rispettive su di questo, o pur le projezioni di tal retta su due piani ad angolo.

Or i primi due di tali espedienti, cioè quelli de' num. 36 e 45, sono da posporsi ai secondi (37 e 46); poichè primieramente questi, e non già quelli danno una grandissima facilità nelle construzioni; e poi se fossero molti i punti dati, a diverse altezze su di un piano, potrebbe facilmente col primo metodo (36, e 45) prodursi confusione, e scambiarsi l' altezza di un punto con quella di un altro, non esistendovi connessione alcuna, nè ordine tra le projezioni di que' punti segnati nel piano di projezione, e le loro altezze esibite a parte. Adunque i Geometri, e gli Artisti in pratica hanno sempre presi per determinanti del sito di un punto, o di una retta nello spazio le loro projezioni su due piani ad angolo; che perciò ogni qual volta in appresso si dirà esser dato nello spazio il sito di un punto, o di una retta, dovrà intendersi, che ne sian date le di loro projezioni su due piani, che s'inclinano in un dato angolo. Siccome poi riesce più facile il ricavare da questi determinanti il sito di tali cose geometriche nello spazio, allorchè i piani di projezione sono posti ad angolo ret-

to, come si è già veduto di sopra (38), e che altronde tal supposizione non deroga alla generalità delle construzioni, potendosi nella maggior parte de' casi prender questi piani ad arbitrio; si suole perciò scegliere questa posizione per tali piani.

Affinchè però non mancasse in qualche caso il mezzo di fare altrimenti, abbiamo ne' numeri 37 e 46 esposta la maniera di determinare il sito di un punto nello spazio, per mezzo delle sue projezioni generalmente, cioè supponendo che i piani di projezione fossero obbliqui; ed abbiamo di più anche mostrato, in qual modo le projezioni di un punto, e di una retta si possano da un piano obbliquo ad un altro trasportare su di un piano perpendicolare a questo (40); ed in appresso non tralasceremo di dare i mezzi convenevoli onde eseguire su i piani di projezione obbliqui quelle construzioni di varj Problemi di Geometria di sito che risolveremo, e che per le ragioni poc' anzi dette, ed anche per metodo eseguiremo su i piani ortogonali.

48. Di più dovendosi, per gli usi pratici rappresentare le due projezioni in disegno su di uno stesso foglio di carta, o su di una medesima aja, si sono perciò determinati gli artisti a supporre, che il piano verticale fosse abbattuto. La projezione verticale è dunque sempre disegnata su di un piano, che fa una continuazione coll' orizzontale, e per farsi un' idea dell' oggetto disegnato, bisogna immaginare, che una convenevol rivoluzione in senso contrario a quella, che il piano verticale ha dovuta fare per abbattersi, lo rimetta nel suo primiero sito. Ciò posto per distinguere bene il piano orizzontale dal verticale abbattuto con esso, si suole segnare con una linea più forte la comune sezione de' piani di projezionè nel disegno.

Così la projezione verticale $a'b'$ di una retta AB

(*fig.* 4.) esistente nello spazio, non si esegue realmente sul piano verticale PQLM nel suo vero sito; ma sì bene sull' altro P'Q'LM, che rappresenta quello abbattuto coll'orizzontale LMNO. Una tal disposizione, indipendentemente dalla ragione poc'anzi addotta, e dalla facilità di esecuzione che dà al disegno, ha ancora il vantaggio di abbreviare la determinazione delle projezioni. Supponendo in fatto, che i punti *a*,*a'* sieno le rispettive projezioni del punto A, è chiaro, che le perpendicolari abbassate da esse sulla comune sezione LM de piani di projezione, le quali debbono concorrere in uno stesso punto A di questa, continuando ad avere un tal sito per rapporto alla LM, anche quando il piano verticale si è abbattuto, verranno a formare una sola linea. Vale a dire, che: *Essendo data la projezione di un punto su di uno de' piani di projezione, la sua projezione sull' altro di questi abbattuto col primo esisterà nella perpendicolare indefinita, che dalla projezione data si abbassa sulla comune sezione de' piani di projezione.* E perciò *se quest' altra projezione dovesse anche esistere in una retta di sito tirata in quest' altro piano, essa sarebbe quel punto, ove una tal retta è incontrata da quella perpendicolare.*

Tutto ciò che in questo numero si è detto per gli piani ortogonali di projezione, si deve intendere anche quando essi sieno obbliqui.

49. Bisogna inoltre avvertire, per la facile intelligenza delle seguenti construzioni, che a fine di rendere più concepibili in disegno le diverse parti di ognuna di esse, e talvolta anche per rendere più agevole la maniera di esprimerle, adopreremo le lettere majuscole A,B, ec. per indicare i punti esistenti nello spazio, e queste stesse segnate con una virgoletta a destra, che suol dirsi *apice*, come A',B', ec. dinoteranno i punti allo-

gati nella comune sezione de' piani di projezione. Inoltre i punti esistenti nel piano orizzontale saranno dinotati colle lettere piccole a, b ec.; e quelli che trovansi nel piano verticale, dalle stesse con un apice, nel seguente modo a', b', ec.: ed ogni punto nello spazio, e le sue projezioni, come anche quell'altro in cui la retta che unisce queste interseca la comune sezione de' piani di projezione, quando l' uno si suppone abbattuto coll'altro, verranno sempre contrassegnati da una stessa lettera variata però nella guisa poc' anzi detta; in modo tale, che se quel punto era dinotato con A, le sue projezioni saranno espresse da a, a', e da A' l'intersezione della retta aa' con la LM. Finalmente a fin di rendere meno complicate le figure, e più intelligibili le soluzioni, si è sempre supposto, che ciò che deve aver luogo in ciascun Problema succeda in un solo de' quattro angoli de' piani di projezione indefiniti; la qual supposizione nulla detrae alla generalità dell'esibizione del quesito, e non toglie i mezzi da fare diversamente, quando ciò non si avveri.

PROP. XIV. TEOR.

50. *Se sono date le projezioni di una retta su due piani che s' incontrano; saranno determinabili da queste i punti ov' essa gl' incontra.*

Cas. 1.° Dinoti LM (*fig.* 6.) la comune sezione de' piani di projezione, che suppongansi primieramente ortogonali, ed ae sia la projezione orizzontale di una retta, ch' è nello spazio, la quale projezione incontri la LM in B'; $a'd'$ ne sia la verticale. Dovrà una tal retta esistere nel piano verticale che passa per ea (c.1.p.8.); che perciò essa dovrà incontrare l'altro piano di projezione nella perpendicolare B'b' elevata dal punto B'

alla LM, nel piano verticale; poichè questa perpendicolare viene ad essere la comune sezione del piano verticale di projezione col poc' anzi detto piano verticale in cui esiste la retta proposta (19. *El. XI.*). Ma questo punto d' incontro deve esistere anche nella *c'a'*; mentre quella retta, e questa sua projezione esistono in un piano stesso. Adunque il punto cercato sarà l' intersezione *b'* della B'*b'* colla *c'a'*. E similmente se dal punto C' ove *a'd'* incontra la LM si elevi a questa la perpendicolare C' *c*, nel piano orizzontale, il punto è ove questa interseca la *ac* sarebbe l' incontro della retta proposta col piano orizzontale.

Cas. 2. Sieno ora obbliqui i piani di projezione LN, LP (*fig.* 7.) E poichè il punto ove la retta proposta incontra uno di tali piani LP deve ritrovarsi non solamente nella projezione *a'b'* di tal retta su questo piano; ma anche nella comune sezione di tal piano coll' altro perpendicolare ad LN condotto per *ab*; nel quale la retta proposta esiste (c.1.p.8.); dovrà perciò quel punto d' incontro esser l' intersezione di questa comune sezione colla *a'b'*. Non deve dunque farsi altro, che mostrare come possa determinarsi tal comune sezione. A tal uopo si prenda nella LM un punto E' ad arbitrio, e da esso gli si elevino le due perpendicolari E'*e*, E'*e'* ne' due piani LN, LP rispettivamente, e la prima di queste si produca fino alla *ab*, l'altra s' intenda prodotta fino ad incontrare in *e'* la comune sezione che si vuol determinare. Ed essendo il piano *e*E'*e'* perpendicolare alla LM (19. XI.), e quindi al piano LN (18. XI.) al quale è anche perpendicolare quell'altro che si è supposto passare per la *ab*; dovrà la loro comune sezione *e'e* esser anche perpendicolare allo stesso piano LN (19. XI.); che perciò l' angolo *e'e*E' è retto. Laonde nel triangolo rettangolo *e'e*E' essen-

do dato l'angolo e E'e', ch'è l'inclinazione de' piani LN, LP, ed il lato E'e, si potrà esso geometricamente construire, e quindi si esibirà la sua ipotenusa E'e'. Adunque si farà noto sul piano LP un punto e' della comune sezione cercata; ma questa deve poi passar anche per lo punto C' ove la ab incontra la LM; che perciò essa sarà la C'e': ed il punto f' ove intersegansi la C'e' e la a'b' sarà il punto d'incontro della retta proposta col piano LP. E similmente si determinerebbe l'incontro di essa coll'altro piano LN.

PROP. XV. TEOR.

51. *Se è data la grandezza di ciascuna delle projezioni di una retta terminata di sito; sarà anche data la grandezza di una tal retta.*

Imperocchè sia la retta terminata AB (*fig.* 1), le cui projezioni su i piani LN, LP sieno *ab*, *a'b'*, saranno le *Aa*, *Bb* perpendicolari al piano LN (d. 5.): se dunque conducasi per l'estremo A della AB, che ha minor altezza sul piano LN la AC parallela alla LN, sarà questa uguale alla *ab* (33); e perciò data. Ma è poi la BC quanto la differenza di altezza dei punti A, B sul piano LN, la qual differenza è data subito che i punti A, B sono dati di sito (37). Adunque sarà anche data la AB, ch'è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono le AC, CB.

52. *Scol.* 1. Se i piani di projezione si supponessero ortogonali; per ottener la differenza di altezza degli estremi A, B della retta proposta su di uno di tali piani LN, basterebbe condurre per la projezione *a'* del punto A sul piano LP la *a'c'* parallela alla LM; sarebbe *c'b'* la differenza cercata (39). Adunque in questo

caso, se si prenda sulla $c'a'$ la $c'h'$ uguale alla ab, e si unisca la $b'h'$; sarà questa quanto la retta AB.

53. *Scol.* 2. Dalla semplice inspezione della figura si rileva, che BA stia ad AC, o ab, come il raggio al seno dell' angolo d' inclinazione della BA al piano LN della projezione ab, cioè, che: *Una retta nello spazio sta alla sua projezione su di un piano, come il raggio al seno dell' angolo d' inclinazione di quella a questo*: che perciò si vede anche come data la grandezza delle projezioni di una retta di sito, si possa determinare l' angolo della sua inclinazione a ciascuno de' piani di projezione.

PROP. XVI. TEOR.

55. *Se sono date di sito due rette, che s' intersegano nello spazio; sarà dato il sito del punto della loro intersezione.*

Imperocchè un tal punto dovendo ritrovarsi nel tempo stesso in ciascuna di tali rette, la sua projezione su ciascun piano di projezione dovrà essere allogata in ciascuna delle projezioni di quelle rette su di questo; che perciò essa dovrà essere l' intersezione di tali projezioni. Adunque di un tal punto essendone date le projezioni su due piani che s' incontrano, ne sarà dato il sito (*p.* 10).

56. *Cor.* Laonde la retta che si conduce dall' intersezione delle projezioni, su di un piano, di due rette, che s' intersegano nello spazio, all' intersezione delle medesime rette sull' altro piano di projezione abbattuto col primo, deve risultar perpendicolare alla comune sezione de' piani di projezione (48).

57. *Scol.* Che se tal congiungente risulti perpendicolare alla comune sezione de' piani di projezione, non

sarà questo un criterio generale da arguirne, che le rette proposte nello spazio s' interseghino, come alcuni Geometri *descrittivi*, tra i quali il *Lacroix*; han detto; poichè ciò può avvenire senza che queste rette s'interseghino nello spazio, ogni qual volta una di tali rette esistesse in un piano perpendicolare a' due di projezione, nel qual caso la congiungente si confonde colle projezioni di questa retta. Noi daremo nel Cap. IV. un principio generale per conoscere quando, intersegandosi le projezioni di due rette su i due piani di projezione, s' intersegano anche le rette nello spazio.

PROP. XVII. TEOR.

58. *Se sono dati di sito i lati di un angolo, esso sarà dato di grandezza, e di sito.*

Sieno *ab*, *ac* (*fig.* 8) le projezioni de' lati dell' angolo su di uno de' piani di projezione; *a'b'*, *a'c'* quelle corrispondenti sull' altro di questi; saran dati i punti *d*, *e* ove tali lati incontrano uno di cotesti piani (*p.* 14); e quindi la *de* (*p.* 1). Di più sarà data la grandezza delle projezioni *a'D'*, *ad* di un lato di quell' angolo, come anche quella delle projezioni *a'E'*, *ae* dell' altro lato. Adunque sarà data la grandezza di ciascuno di questi (p. 15): ma era anche dato il lato *de*, che lo sottende; quindi un tal angolo si potrà geometricamente esibire, e perciò sarà dato di grandezza.

Essendo poi dati di sito i suoi lati, e quindi il suo vertice (p. 16); il suo sito dovrà essere anche dato (*deff.* 2, e 3).

PROP. XVIII. TEOR.

59. *Se sono dati di sito i vertici degli angoli di una figura rettilinea, ch' è nello spazio; tal figura sarà data di sito, di grandezza e di specie.*

Imperocchè le rette che congiungono le projezioni date de' vertici degli angoli di quella figura su ciascun piano di projezione, ognuna con quella che gli è prossima, sono le projezioni de' lati corrispondenti di essa; che perciò questi saranno dati di sito; e quindi anche di sito sarà data quella figura, che da essi è compresa (*d.* 3.). Inoltre sarà anche data la grandezza di questi lati (*p.* 15.), e sarà pur data quella degli angoli ch' essi comprendono (*p.* 17.): che perciò si potrà geometricamente descrivere una figura rettilinea uguale, e simile alla proposta; e quindi questa sarà anche data di grandezza, e di specie.

CAP. III.

DE' DETERMINANTI DEL SITO DE' PIANI NELLO SPAZIO.

60. *Def.* IX. Si chiama *traccia* di un piano, ch' è nello spazio, la sua intersezione con uno de' piani di projezione: e se questi piani sieno uno orizzontale, e l' altro verticale, la traccia sul primo di essi prenderà il nome di *orizzontale*, e si dirà *verticale* quella sull' altro.

In generale il nome di *traccia* si dà pure all' intersezione di una qualunque superficie curva con uno de' piani di projezione.

PROP. XIX. TEOR.

61. *E' dato il sito di un piano nello spazio, se sono date le sue tracce su due piani di sito posti ad angolo.*

Imperocchè se per una di esse si concepisca passare un piano, e questo rivolgersi intorno a tal retta; tra le infinite posizioni diverse, ch' esso prenderà nello spazio, dovrà anche passare per l' altra delle tracce date; ed in questo caso la sua posizione resterà determinata, essendo esso il solo che può passare per queste due rette (2. *El.* XI.)

62. Cor. Adunque ogni qualvolta si dirà in appresso, che un piano è dato di sito nello spazio, bisognerà intendere, che ne sien date le tracce su due piani di sito posti ad angolo.

PROP. XX. TEOR.

63. *Se è data una delle tracce di un piano, ed un punto per lo quale esso passa; tal piano sarà dato di sito.*

Dinoti A'*a* (*fig.* 9.) la traccia data, e sieno *d*, *d'* le projezioni del punto dato. Si prenda in A'*a* un qualunque punto *b*, dal quale si abbassi sulla LM, comune sezione de' piani di projezione, la perpendicolare *b*B', sarà B' la projezione del punto *b* sull' altro piano di projezione, se questi suppongansi ortogonali: che perciò, congiunte le *db*, *d'*B', saranno queste le projezioni corrispondenti di quella retta, che dal punto dato nel piano proposto si tira al punto *b* preso nella sua traccia orizzontale A'*a*. Or una tal retta dovendo esistere in siffatto piano, dovrà incontrare l' altra traccia di esso sul piano di projezione verticale; che perciò essendo determinato il punto *c'* ove quella retta incontra questo piano di projezione (*p.*14.*ca.*1.), sarà anche determinata l' altra traccia A'*a'* del piano proposto; e quindi esso sarà dato di siso (*p.* 19.).

Che se i piani di projezione non sieno ortogonali; allora abbassata da *b* (*fig.* 10.) la perpendicolare *b*B' sulla LM, si descriva sulla B'*b* il triangolo rettangolo B'K*b*, in cui l' angolo *b*B'K rappresenti l' inclinazione de' piani di projezione. Egli è chiaro, che se questi suppongansi nel loro vero sito, e che il triangolo B'K*b* si concepisca rivolgersi intorno a B'*b*, finchè il suo piano divenga perpendicolare al piano di projezione in cui esiste la B'*b*; in tal caso la B'K dovrà allogarsi nell' altro piano di projezione perpendicolarmente alla LM, e il punto K si troverà essere, in questa posizione, la projezione del punto *b* sul piano

della projezione d'. Adunque quando i piani di projezione si suppongono abbattuti, si otterrà tal altra projezione, prolungando la bB' in b', finchè sia $B'b'$ uguale a BK; il punto b' sarebbe questa projezione: ed il resto della determinazione si otterrà nel modo stesso del caso precedente, applicandovi però per l' esibizione del punto c' il caso 2 della prop. 14.

PROP. XXI. TEOR.

64. *È dato il sito di un piano, che passa per tre punti dati nello spazio.*

Sieno a, b, c (*fig.* 11) le projezioni de' punti dati sopra uno de' piani di projezione, ed a', b', c' le corrispondenti sull' altro: si congiungano le ba, ac, cb; $b'a'$, $a'c'$, $c'b'$; queste congiungenti saranno le projezioni delle rette che uniscono i punti dati nello spazio, le quali esistendo nel piano che passa per tali punti, dovranno incontrare i piani di projezione in ciascuna delle tracce di quello su questi. Ma gl' incontri di quelle rette co' piani di projezione sono determinabili (*p.* 14.). Dunque saranno anche determinabili le tracce del piano, che passa per esse; e quindi sarà dato il sito di un tal piano nello spazio (*p.* 19.).

65. *Scol.* Per la determinazione di queste tracce non è necessario di esibire gl' incontri di tutte le tre rette con ciascuno de' piani di projezione; ma basta di esibire gl' incontri e, d di due di esse con uno di que' piani, per avere la traccia edE su di questo; e quindi, determinando il solo incontro d' di una delle stesse rette coll' altro piano di projezione, si avrà l' altra traccia $d'E'$, nel caso che la già determinata ed non siasi trovata parallela alla LM: ed in questo caso si ot-

terrebbe la traccia che passa per d', tirando anche per questo punto una parallela alla LM; giacchè *se una delle tracce di un piano è parallela alla comune sezione de' piani di projezione, anche l' altra deve esser parallela a tal comune sezione*:

LEMMA.

66. *Tutti que' punti esistenti nel piano di due rette di sito poste ad angolo, da ciascun de' quali abbassando su di esse le perpendicolari, queste serbansi tra loro una stessa ragione data, debbono essere allogati in un' altra retta di sito, che passa per lo vertice di quell' angolo*.

Sieno E, e due di tali punti (*fig.* 12. *n.* 1, *e* 2), e, s' è possibile, la retta Ee, che gli unisce, non passi per lo vertice A dell' angolo compreso dalle rette di sito AB, AC sulle quali da que' punti si sono abbassate le perpendicolari ED, EF; ed, ef, e quindi interseghi una delle rette di sito AB nel punto G, e l' altra AC in H. E poichè ED : EF :: M : N, ed è pure ed : ef :: M : N; sarà ED : EF :: ed : ef, e permutando ED : ed :: EF : ef. Ma ED : ed :: EG : Ge, ed EF : ef :: EH : He. Adunque sarà EG : Ge :: EH : He; e dividendo si avrà Ee : eG :: Ee : eH, cioè eG uguale ad eH; il che essendo falso, ne segue che la retta Ee, che passa per gli punti E, e, come anche per tutti quegli altri, che hanno la stessa condizione, debba passare per lo punto A.

Ciò premesso, se AF si prenda di una data grandezza, sarà dato il sito del punto F, e quindi quello della FE, ch' è perpendicolare alla AC nel punto F. Adunque sarà anche dato il punto L, dove questa interseга la AB (*p.* 3.); e perciò saran dati di grandezza la retta FL (*p.* 1.), e l' angolo FLA (*p.* 6.).

Laonde nel triangolo LED rettangolo in D sarà data la ragione di LE ad ED, che suppongasi espressa da P : M; ma è poi ED : EF :: M : N; quindi starà LE : EF :: P : N; e per conseguenza sarà dato il punto E nella retta di sito FL. Ma è pur dato di sito l'altro punto A: adunque la EA dovrà esser data di sito.

67. *Scol.* La semplice ispezione della figura fa rilevare, che i punti proposti colla condizione espressa nel precedente teorema locale possano essere allogati in due diverse rette di sito, una che divide l'angolo BAC, e l'altra che cade al di di fuori di esso, dalla parte di quel lato sul quale, per la qualità della ragion data di M:N, deve cadere la perpendicolare maggiore: e ciò è necessario a notarsi per la completa determinazione del seguente Teorema.

PROP. XXII, TEOR.

68. *È dato il sito di un piano nello spazio, se è data una delle sue tracce, e l'angolo d'inclinazione di esso al piano di projezione in cui esiste questa traccia.*

Sia A'*a* (*fig.* 13.) la traccia data di un piano che s'inclina a quello di projezione *a*A'M in cui questa esiste, in un angolo dato P.

Cas. 1. Suppongansi primieramente ortogonali i piani di projezione, e per un qualunque punto *b* della traccia data A'*a*, che supporremo esser l'orizzontale, s'intenda passare un piano perpendicolare ad essa; un tal piano sarà verticale: quindi intersegherà il piano orizzontale *a*A'M nella perpendicolare *b*C', che dal punto *b* si eleva alla A'*a*, il piano di projezione verticale nella C'*c*' perpendicolare alla LM; e finalmente il piano proposto in una retta *bc*', che comprenderà colla

bC' l' angolo d' inclinazione di questo piano all' orizzontale, cioè l' angolo P. Or queste due seconde rette, cioè la $C'c'$, e la bc' debbono concorrere in uno stesso punto nella traccia verticale del piano proposto; che perciò esse formeranno colla bC' un triangolo rettangolo, in cui essendo dati l' angolo acuto $c'bC'$, ed il cateto adjacente bC', resterà determinato l' altro cateto $C'c'$, e quindi il punto c'. Adunque la traccia verticale $A'a'$ del piano proposto verrà ad essere geometricamente assegnata, e quindi sarà dato il sito di un tal piano nello spazio (*p.* 19.).

Cas. 2. Che se i piani di projezione s' inclinino sotto un angolo dato Q (*fig.* 14.), e sia $A'a$ la traccia data del piano proposto, ed $A'a$ quella che deve corrispondergli sull' altro piano di projezione. Da un punto C preso in questa s' intenda abbassata sul piano di projezione sottoposto la perpendicolare Cc; poi dal punto c si abbassino sulle aA', LM le perpendicolari cb, cC'; e finalmente si congiungano le Cb, CC'. Egli è chiaro, che queste tali rette sieno anche respettivamente perpendicolari alle $A'a$ ed LM (*p.* 18, *e* 4. *XI.*); e quindi che l' angolo Cbc sia quanto P, e l' altro $cC'C$ quanto Q (*d.* 6. *XI.*). Adunque nel triangolo rettangolo Ccb essendovi dato l' angolo acuto cbC, sarà esso dato di specie; e perciò dovrà esser data la ragione di $bc : cC$, che esprimasi per quella di M : R. Similmente nell' altro triangolo rettangolo CcC' essendo anche dati gli altri suoi angoli, sarà pur data la ragione di $Cc : cC'$, che si esprima per R : N. Adunque starà $bc : cC' :: M : N$; e perciò il punto c si apparterrà ad una retta di sito, che dovrà passare per lo punto A' (*lem. prec.*).

Ciò posto, ecco la determinazione di questo caso del presente teorema. Si esibisca la locale $A'E$ (*fig.* 15)

Cas. 2. Che se i piani di projezione s' inclinino in un angolo dato Q (*fig.* 14); in un tal caso si faccia lo stesso apparecchio del caso 2 della Proposizione precedente, sarà anche l'angolo CC'c quanto Q, e l'altro C*bc* dinoterà l'inclinazione del piano proposto *a*'A'*a* a quello di projezione in cui esiste la traccia A'*a*, cioè l'angolo che deve determinarsi. Or poichè il punto C nella retta di sito A'*a* può prendersi ad arbitrio, si potrà perciò prendere ad una data distanza dall' altro A', che perciò quel punto sarà dato di sito, e quindi sarà data di sito e di grandezza la perpendicolare CC' abbassata dal punto C sulla LM (*p.*5.); e di sito il punto C' ov' essa incontra la LM (*p.*3). Laonde nel triangolo rettangolo CC'c essendovi dato l' angolo in C' e l'ipotenusa CC'; si potrà esso construire, e quindi si esibiranno i suoi cateti Cc, e cC': perciò sarà dato di sito il punto *c*, e quindi sarà data di grandezza la perpendicolare *cb* che da esso si abbassa sulla retta di sito A'*a*. Laonde nel triangolo rettangolo C*cb* essendovi dati di grandezza i cateti C*c*, *cb*, esso si potrà construire, e quindi resterà determinato l'angolo C*bc*. Ciò posto, ecco la determinazione di questo caso del presente Teorema. Si prenda in A'*a*' (*fig.* 16.) un punto *c*', dal quale si abbassi la perpendicolare *c*'C' sulla LM. Indi su di questa perpendicolare si descriva il triangolo rettangolo *c*'KC' in cui l'angolo *c*'C'K sia quanto l'altro Q d' inclinazione de' piani di projezione. Si prolunghi la *c*'C' in *c*, finchè sia C'*c* uguale a C'K, e dal punto *c* si abbassi sulla A'*a* la perpendicolare *cb*. Finalmente dal punto *b* si tagli sulla A'*a* la *bd* uguale alla *c*'K; congiunta la *cd*, l'angolo *bcd* sarà quello nel quale inclinasi il piano dato al piano di projezione in cui esiste la sua traccia A'*a*. E similmente si determinerebbe l'inclinazione del piano dato all' altro piano di projezione in cui è l'altra sua traccia A'*a*'.

70. *Scol.* In una maniera analoga a quella de' due precedenti teoremi si potrebbe anche eseguire la determinazione del seguente

TEOREMA

71. *È dato il sito di un piano nello spazio, se n'è data una delle tracce, e l'angolo che questa deve comprendere coll' altra.*

Imperocchè in tal caso supponendo essere A'a' (*fig.* 14) la traccia data, ed A'a quella da determinarsi si potrà collo stesso artifizio praticato nel secondo caso del Teor. prec. pervenire a determinare il punto *c*. Ed allora se si construisca un triangolo rettangolo in cui l'ipotenusa sia quanto la CA', ed uno degli angoli acuti rappresenti l'angolo dell' inclinazione delle tracce, il cateto adjacente a questo dovrà esprimere in grandezza la A'*b*; e perciò se col centro A', è con questo cateto per raggio si descriva l'arco di cerchio *sby*, la tangente *cb* condotta a quest' arco dal punto *c* determinerà il punto *b* per dove deve passare l'altra traccia.

PROP. XXIV. TEOR.

72. *Se un piano è dato di sito, sarà anche dato di sito ogni punto ch' è in esso, di cui ne sia data una sola projezione.*

Sieno A'*a*, A'*a'* (*fig.* 16.) le tracce del piano dato di sito, e sul piano di projezione in cui esiste la A'*a* sia dato il punto *c* il qual ne indichi la projezione di un punto C del piano dato. È egli chiaro, che se si abbassi da *c* sulla A'*a* la perpendicolare *cb*, e che poi s'intenda congiunto il punto C coll' altro *b*; questa congiungente, la *cb*, e la C*c*, ch' è l'altezza del

congiunta la $c'b$, dovrà esser questa anche perpendicolare alla $A'a$, e quindi l' angolo $c'bC'$ sarà l' inclinazione del piano proposto $a'A'a$ al piano di projezione ov' è la sua traccia $A'a$, cioè l' angolo da determinarsi.

Or nel triangolo $bC'c'$ rettangolo in C' vi son dati i cateti bC', e $C'c'$; quindi esso si potrà construire, e per conseguenza resterà esibito l' angolo $c'bC'$, che cercavasi. E similmente si determinerà l' inclinazione del piano proposto all' altro piano di projezione.

Cas. 2. Che se i piani di projezione s' inclinino in un angolo dato Q(*fig.*14); in un tal caso si faccia lo stesso apparecchio del caso 2 della Proposizione precedente, sarà anche l' angolo $CC'c$ quanto Q, e l'altro Cbc dinoterà l' inclinazione del piano proposto $a'A'a$ a quello di projezione in cui esiste la traccia $A'a$, cioè l'angolo che deve determinarsi. Or poichè il punto C nella retta di sito $A'a$ può prendersi ad arbitrio, si potrà perciò prendere ad una data distanza dall'altro A', che perciò quel punto sarà dato di sito, e quindi sarà data di sito e di grandezza la perpendicolare CC' abbassata dal punto C sulla LM(*p*.5), e di sito il punto C' ov' essa incontra la LM (*p*.3). Laonde nel triangolo rettangolo $CC'c$ essendovi dato l' angolo in C' e l'ipotenusa CC', si potrà esso construire, e quindi si esibiranno i suoi cateti Cc, e cC': perciò sarà dato di sito il punto c, e quindi sarà data di grandezza la perpendicolare cb che da esso si abbassa sulla retta di sito $A'a$. Laonde nel triangolo rettangolo Ccb essendovi dati di grandezza i cateti Cc,cb, esso si potrà construire, e quindi resterà determinato l' angolo Cbc. Ciò posto, ecco la determinazione di questo caso del presente Teorema. Si prenda in $A'a'$ (*fig.* 16) un punto c', dal quale si abbassi la perpendicolare $c'C'$ alla LM.

Indi su di questa perpendicolare si descriva il triangolo rettangolo c'KC' in cui l'angolo c'C'K sia quanto l'altro Q d'inclinazione de' piani di projezione. Si prolunghi la c'C' in c, finchè sia C'c uguale a C'K, e dal punto c si abbassi sulla A'*a* la perpendicolare *cb*. Finalmente dal punto *b* si tagli sulla A'*a* la *bd* uguale alla c'K; congiunta la *cd*, l'angolo *bcd* sarà quello nel quale inclinasi il piano dato all'altro di projezione in cui esiste la sua traccia A'*a*. E similmente si determinerebbe l'inclinazione del piano dato all'altro piano di projezione.

71. *Scol.* Del pari che il precedente, quest'altro Teorema, che n'è quasi il converso, contiene la risoluzione del seguente Problema, di cui trovasene anche indicata la soluzione trigonometrica in fine della Trigonometria Sferica, cioè: *Nell'angolo solido* A' (*fig.* 14) *compreso da' tre angoli piani a*'A'L, LA'*a*, *ed a*'A'*a*', *essendo dato ciascun di questi, e di più l'inclinazione di que' piani in cui esistono i primi due; determinare l'inclinazione di ciascuno di tali piani al piano del terzo angolo.*

PROP. XXIV. TEOR.

72. *Se un piano è dato di sito, sarà anche dato di sito ogni punto ch' è in esso, di cui ne sia data una sola projezione.*

Sieno A'*a*, A'*a*' (*fig.* 16), le tracce del piano dato di sito, e sul piano di projezione in cui esiste la A'*a* sia dato il punto *c* il qual ne indichi la projezione di un punto C del piano dato. È egli chiaro, che se si abbassi da *c* sulla A'*a* la perpendicolare *cb*, e che poi s'intenda congiunto il punto C coll'altro *b*; questa congiungente, la *cb*, e la C*c*, ch'è l'altezza del

punto C sul piano di projezione $aA'M$ comprenderanno un triangolo rettangolo, in cui è dato l'angolo Cbc, come quello, ch'è l'inclinazione del piano dato al piano di projezione $aA'M$ (*p.*23), ed è pur dato il cateto bc. Laonde esso triangolo potrà construirsi, e quindi si determinerà la Cc. Che perciò essendone data del punto C la projezione c, e la sua altezza su questo piano di projezione, esso sarà dato di sito (*p.* 9.)

PROP. XXV. TEOR.

73. *S' è dato il sito di due piani, che s' intersegano; sarà anche data di sito e di grandezza la comune sezione loro.*

Sieno $A'a$, $A'a'$ (*fig.* 17) le tracce di un piano, e $B'b$, $B'b'$ quelle dell' altro; ed f, e' rappresentino i punti ove s'intersegano quelle che esistono in uno stesso piano di projezione, e quindi que' punti ove questi piani sono incontrati dalla comune sezione de' piani dati. Ciò premesso, si determini la projezione del punto f, che esiste in uno de' piani di projezione, sull'altro di questi, ed una tal projezione sia F'. E poichè l' estremo e' della comune sezione de' piani dati è egli stesso la sua projezione sul piano di projezione $a'A'M$ in cui esiste, e che su di questo v' è F' la projezione dell' altro estremo f di essa, il quale era nell' altro piano di projezione; perciò sarà $e'F'$ la projezione di quella comune sezione sul piano di projezione $a'A'M$; ed una tal projezione sarà data non solamente nel sito, ma anche in grandezza (*p.* 1). Similmente si determinerà il sito e la grandezza della projezione $E'f$ della comune sezione de' piani dati sull' altro piano di projezione $MA'a$. Adunque una tale intersezione dovrà esser data di sito (*p.*13), e di grandezza (*p.* 15).

PROP. XXVI. TEOR.

74. *Se sono dati di sito due piani che s' intersegano, è anche dato l'angolo della loro scambievole inclinazione.*

Sieno A'*a*, A'*a*' le tracce di uno de' piani dati, B'*b*, B'*b*' quelle dell' altro (*fig.* 18); sarà data di sito, e di grandezza la loro comune sezione (*p.* 25), di cui ne sia *f*D' una delle projezioni. Ciò posto, si prenda in *f*D' un qualunque punto *h*, cioè si prenda la *fh* di una data grandezza, e si tiri per *h* la *ehg* perpendicolare ad *f*D' fino alle tracce A'*a*, B'*b* de'piani dati, che esistono in questo piano di projezione: poi si concepisca passare per tal retta un piano perpendicolare alla comune sezione de' piani dati, cioè alla *ff*', allorchè i piani di projezione si suppongono nel loro vero sito, e sia K il punto ove tal piano incontra quella comune sezione; e quindi *e*K, *g*K le intersezioni del piano stesso con ciascuno de' dati, le quali debbono esser perpendicolari all' intersezione di questi; che perciò l' angolo *e*K*g* ch' esse comprendono rappresenterà l' inclinazione scambievole de' piani dati, e sarà perciò quello, che deve determinarsi. Or supponendo che i piani di projezione sieno nel loro vero sito, è chiaro che nel triangolo *f'f*A' essendovi dati i tre suoi lati, vi debba esser pur dato l'angolo A'*ff*', o sia *ef*K: che perciò nel triangolo *eKf* rettangolo in K essendovi data l' ipotenusa *ef*, e l' angolo acuto *ef*K, potrà esso construirsi, e quindi determinarvisi la *e*K. Similmente si dimostrerà che sia pur data la *g*K. Laonde nel triangolo *e*K*g* essendovi dati i tre suoi lati, si potrà esso geometricamente construire, e quindi resterà determinato l' angolo *e*K*g*, che cercavasi.

PROP. XXVII. TEOR.

75. *S' è dato il sito di un piano e quello di una retta, che lo incontra nello spazio; sarà dato il sito di quel punto ove questa lo incontra.*

Sieno aA', $A'a'$ le tracce del piano dato (*fig.* 19), $e'de$, $d'e'$ le projezioni della data retta, per la quale s' intenda passare un piano perpendicolare ad uno di quelli di projezione $aA'L$. Un tal piano avrà per sua traccia su di questo la stessa de, e la sua traccia sull' altro piano di projezione $a'A'L$ dovrà passare per lo punto g' dove è questo incontrato dalla retta data, il qual punto si determinerà per mezzo del primo, o del secondo caso della prop. 14, secondo che i piani di projezione si suppongano ad angolo retto, o pure obbliquo. Laonde quest' altra traccia sarà rappresentata dalla $g'F'$: che perciò essendo dati di sito i due piani $a'A'a$, e $g'F'd$; dovrà esser data di sito la loro intersezione (*p.* 25), di cui una delle projezioni cade nella medesima de, e l' altra sia la $E'f$. Or il punto ove quella retta di sito incontra il piano dato dovendo esistere nella intersezione de' piani poc' anzi detti, la projezione di esso sul piano della $d'g'$ dovrà cadere nella $f'E'$; ma deve anche trovarsi nella $d'g'$, ch' è la projezione corrispondente della retta data. Adunque quella projezione sarà il punto e' ove s' intersegano le $d'g'$, $f'E'$. E poichè l' altra projezione di quel punto d' incontro deve esistere nella dF', e nella perpendicolare indefinita, che da e' si abbassa sulla LM (*n.* 48); perciò essa sarà il punto e. Laonde il punto d' incontro della retta data col piano dato sarà dato di sito (*p.* 10.)

PROP. XXVIII. TEOR.

76. *Se sono dati di sito un punto, ed un piano; sarà anche data di sito e di grandezza la perpendicolare, che da quel punto si abbassa su questo piano.*

Sieno A'a, A'a' (*fig.* 19) le tracce del piano dato, e *d*, *d'* le projezioni del dato punto. E poichè il piano, che projetta la perpendicolare al piano *a*A'*a'* sul piano di projezione *a*A'L deve essere nel tempo stesso perpendicolare a ciascuno di questi (*n.*27, e 18 *El.*xi.); perciò la comune sezione di tali piani, cioè la A'*a* dovrà esser perpendicolare a quel primo piano projettante (19. *El.*xi), e quindi alla comune sezione di esso col piano *a*A'L (*d.* 4. *El.* xi), ch' è la projezione su questo piano della perpendicolare proposta; che perciò dovendo questa projezione passare per *d* sarà essa la perpendicolare *db*, che dal punto *d* si abbassa sulla A'*a*. E similmente si troverebbe, che la projezione di tal perpendicolare sull' altro piano di projezione, sia la perpendicolare *d'b'* abbassata dal punto *d'* sulla A'*a'*. Quindi essendo date le projezioni della proposta perpendicolare, essa sarà data di sito (*p.*10). Laonde sarà anche dato il sito di quel punto ov' essa incontra il piano dato (*p.* 27), le projezioni del quale sieno le *e*, *e'*: che perciò saranno date di grandezza le projezioni *de*, *d'e'* di tal perpendicolare definita tra il punto da cui parte, ed il piano sul quale si abbassa; e quindi sarà anche data la grandezza di essa perpendicolare (*p.* 15).

77. *Scol.* Dalla determinazione della prima parte del presente Teorema si rileva, che: *Se una retta è perpendicolare ad un piano, ciascuna projezione di quella retta deve essere anche perpendicolare alla corrispondente traccia del piano.*

PROP. XXIX. TEOR.

78. *Se sono dati di sito una retta ed un punto; sarà anche dato di sito quel piano, che passa per lo punto dato, ed è perpendicolare alla retta data.*

Sieno ab, $a'b'$ le projezioni della data retta (*fig*:20), e d, d' quelle del punto dato, per lo quale s'intenda tirata nel piano proposto una retta parallela ad uno de' piani di projezione; una tal retta dovrà esser non solamente parallela alla sua projezione su tal piano(*d*.8); ma anche alla traccia su di questo del piano proposto; poichè altrimenti, incontrando essa una tal traccia incontrerebbe il corrispondente piano di projezione, cui si è supposta parallela. Adunque siccome la traccia del piano proposto deve esser perpendicolare alla ba (*sc. p.* 28), così la projezione della retta proposta nel piano della ba, sarà anche perpendicolare alla ba: ma deve anche passare per lo punto d; adunque una tal projezione resterà determinata abbassando da d sulla ba la perpendicolare dc. Inoltre essendosi la retta tirata supposta parallela al piano di projezione in cui è la ba, tutti i suoi punti debbono essere ugualmente alti su tal piano, e perciò l' altezza di ciascun di essi è data al pari di quella del punto dato; che perciò per un qualunque di essi, che abbia per projezione sul piano della ba il punto e, se ne potrà determinare l'altra projezione e' sul piano della $b'a'$: quindi sarà anche data su tal piano la $d'e'$, ch' è l' altra projezione della retta che si è supposta tirata (*). Laon-

(*) Se i piani di projezione fossero ortogonali, la $d'e'$ si otterrebbe tirando per d' la parallela alla LM (39).

PROP. XXXVIII. PROBL.

92. *Data di sito una retta nello spazio; determinare quel piano che, passando per essa, s' inclina ad uno di quelli di projezione in un dato angolo.*

Si determinino gl' incontri c, b' (*fig.* 26) della retta data con ciascuno de' piani in cui esistono le sue projezioni *ed*, *e'd'*; per ciascun di questi punti dovrà passarvi la corrispondente traccia del piano che si cerca. Ciò posto, il punto *b'* si projetti in *b* sull' altro piano di projezione, e sulla B'*b'* si prenda la B*f* uguale all' altezza del punto *b'* su questo piano, cioè alla *bb'* (supponendo i piani di projezione nel loro vero sito); poi al punto *f* della *f*B' si costituisca l' angolo B'*f*G' uguale al complemento di quello in cui si deve inclinare il piano cercato al piano di projezione ove si trola *ed*: finalmente col centro *b*, intervallo B'G' si descriva il cerchio *hkl*, al quale si tiri per *c* la tangente *ch*A', che sarà data di sito, e quindi anche di sito il punto A'; sarà questa la traccia del piano cercato sul piano di projezione della *ed*, e l' altra traccia sarà perciò la A'*b*.

Imperocchè (supposto che i piani di projezione avessero il loro vero sito), è chiaro che il piano *hbb'* e l' altro della projezione *ed* sieno perpendicolari tra loro; che perciò la *ch* essendo perpendicolare alla *bh* comune sezione di essi, lo dovrà esser pure alla *hb'*; quindi l' angolo *b'hb* è precisamente quello in cui inclinasi il piano *b'*A'*c* al piano della projezione *ed* (*d*. 6. *El*. XI). Ma quest' angolo *b'hb* apparisce dalla construzione essere uguale all' altro *f*'G'B'. Adunque il piano *b'*A'*c* è il cercato.

93. *Scol.* Se la retta data fosse stata una delle tracce del piano cercato, l' altra di queste si sarebbe

rinvenuta con una construzione analoga a quella di poc' anzi. Ed in tal modo si sarebbe ottenuta la determinazione del teorema, che: *E' dato il sito di un piano, se è data una delle sue tracce, e l' angolo in cui esso inclinasi al piano dell' altra traccia.*

PROP. XXXIX. PROBL.

94. *Dato il sito di un piano, e quello di una retta, ch' è in esso; determinare quel piano, che intersegando il proposto in questa retta, gli s' inclina in un dato angolo.*

Sieno. A'a', A'a (*fig.* 18) le tracce del piano dato, B'b', B'b quelle del piano cercato, ed fD', fE' le projezioni della retta data, che rappresenta la comune sezione di que' piani: i punti f, f' ove queste projezioni incontrano le tracce A'a, A'a' del piano dato, saranno ad un tempo que' punti ove la retta data incontrà i piani di projezione, e quelli per gli quali debbon passare le respettive tracce del piano, che cercasi. Ciò posto per un punto qualunque h della D'f si elevi a questa la perpendicolare eh nel piano MA'a, e poi s' intenda condotto per una tal retta un piano perpendicolare alla retta data nello spazio, che la incontri in K: un tal piano intersegherà il piano dato, e quello che cercasi nelle rette eK, Kg le quali s' inclineranno l' una all' altra nell' angolo dato P. Inoltre si vedrà, come nella Prop. XXVI., che sia data la Ke, e la fK: che perciò intendendosi congiunta la Kh, nel triangolo fKh rettangolo in K, essendovi data l' ipotenusa fh e 'l cateto fK, sarà esso construibile, e quindi si potrà determinare la Kh. Adunque se descrivasi un triangolo XYQ co' tre lati del triangolo eKh, e che poi al punto Y della XY, che corrisponde al punto K della eK si costituisca l' angolo XYT uguale a quello da-

to sotto cui inclinasi il piano dato al piano che vuol tirarsi, cioè a P; è egli chiaro che la YT intersegando la XQ debba segnare la QT uguale alla hg, cioè alla perpendicolare alla D'fmh, prolungata sino alla traccia del piano che cercasi; che perciò questa sarà data al pari di quella; e quindi si avrà nel piano MA'a un altro punto, oltre f, per dove deve passare la traccia corrispondente del piano che vuol tirarsi. Laonde una tal traccia sarà la $f$$g$B'; e quindi l'altra dovrà essere la f'B'.

PROP. XL. PROBL.

95. *Dato un angolo, e l'inclinazione de' suoi lati ad un piano, construire la projezione di quell'angolo su questo piano.*

Prendasi il punto A' (*fig.* 27) per la projezione del vertice di quell'angolo su questo piano, ed A'B' per quella di un suo lato. E poichè ne'dati di questo problema non s'include sito; ma sola grandezza di essi; perciò si potrà supporre, che il vertice dell'angolo proposto stia a qualunque altezzá sul piano della projezione A'. Si supponga perciò passare per la A'B' un piano verticale, il quale si concepisca abbattuto, e nella perpendicolare A'a' tirata in questo piano alla LM si prenda un qualunque punto a', il quale dinoti il vertice di quell'angolo. Inoltre dal punto a' s'inclinino alla LM le rette a'B', a'C' sotto gli angoli ne' quali i lati del proposto angolo si suppongono inclinarsi al piano in cui vuol esso projettarsi; potrá a'B' dinotare effettivamente l'uno di tali lati; e l'altro è chiaro che dovrà essere dinotato nella sola lunghezza dalla a'C'; poichè é chiaro che tutte le rette, che dal punto a' s'inclinano al piano ove esiste la projezione A' di quel punto, sotto uno stesso angolo, debbono esser lati de

cono retto che si genera dal triangolo a'A'C' rivolgendosi intorno al cateto a'A' : che perciò se descrivasi il cerchio C'ef, quell'altro lato nel suo vero sito dovrà incontrare in un punto la circonferenza C'ef. Per determinare un tal punto, basterà costituire un triangolo co' lati B'a', C'a' che comprendano l'angolo dato che si vuol projettare : egli è chiaro, che se col centro B' e coll' intervallo il terzo lato di tal triangolo, cioè quello che sottende quell'angolo dato, si descriva nel piano del primo cerchio l'altro geh; il punto e ove s'intersegheranno le due circonferenze sarà il cercato : ed esse si dovranno intersegare, come lo mostrano i dati del problema. Laonde congiugnendo la A'e si avrà l'angolo eA'B', che sarà la dimandata projezione dell' angolo dato.

95. *Scol.* I. Al problema proposto si riduce immantinente quest' altro : *Dati gli angoli che comprendono due rette fra loro, e colla perpendicolare che dal punto ove s' incontrano si abbassa su di un piano dato ; determinare su questo la projezione di quel primo angolo* Poichè è chiaro che gli angoli che formano i lati dell'angolo dato colla perpendicolare, sono rispettivamente i complementi di quelli sotto cui essi s' inclinano a piano dato ; che perciò questi saranno anche dati : e la construzione di questo Problema diventa la stessa di quella del precedente. Ed essa si sarebbe anche potuta effettuire senza tal riduzione, costituendo al punto a della A'a' gli angoli A'a'B', A'a'C' uguali rispettivamente a quelli compresi da' lati del proposto angolo e dalla perpendicolare al piano dato, e continuando nel resto precisamente come nel precedente problema.

97. *Scol.* II. Il problema ultimamente enunciato nello Scolio precedente può avere un uso geometrico nel determinare l' inclinazione de' piani in cui esistono

due de' tre angoli piani dati comprendenti un angolo solido, non essendo altro una tale inclinazione, che la projezione del terzo angolo su di un piano, cui si supponga perpendicolare il lato comune agli altri due. Ed esso o l' altro quasi identico della prop. è anche importante nelle pratiche geodetiche, per un'operazione, che spesso vi occorre, qual' è quella di *ridurre un angolo all' orizzonte*. Noi non entriamo in questo dettaglio di applicazione alieno dal nostro scopo; e che potrà facilmente rilevarsi da un qualunque libro di Geodesia.

PROP. XLI. PROBL.

98. *Costituire ad un punto dato in una retta di sito un angolo dato, con un'altra retta la quale s'inclini ad uno de' piani di projezione in un angolo anche dato.*

Sieno *ab*,*a'b'* (*fig.*28) le projezioni della retta data, e *d*,*d'* quelle del punto dato in essa, dal quale si vuol tirare un'altra retta, che comprenda con questa un dato angolo P, e s' inclini al piano di projezione in cui esiste la *ab* sotto l'angolo Q.

Si applichi nell'angolo Q la RS perpendicolare ad un suo lato, ed uguale all'altezza del punto dato sul piano della *ab*, e poi col centro *d*, e col raggio quanto il cateto RQ del suddetto triangolo si descriva il cerchio *cef*: è chiaro che ogni retta, che da quel punto si conduce ad un qualunque altro della circonferenza di questo cerchio s' inclini al piano di esso sotto l' angolo Q; che perciò bisognerà determinare quella tra queste, che comprende colla data l'angolo P. A tal uopo si determini il punto *h* ove la tal retta data incontra il piano della *ab* (*p.*14); sarà data di grandezza quella retta, che dal punto proposto si termina ad *h*(*p.*15). Ma è pur data di grandezza la retta che si cerca, la quale è

quanto la QS, e l'angolo che questa e quella comprendono. Adunque sarà anche dato quel lato opposto a quest'angolo, cioè la distanza del punto h da quello ove la retta cercata incontra il piano della ab in un punto della circonferenza cfe. Laonde se col centro h, ed intervallo una tal distanza si descriva l'arco ef, i punti e, f sodisferanno al problema, cioè congiunte le ed, df ognuna di queste rappresenterà la projezione della retta cercata s l piano della ab. E tal retta avrà per projezione sull' altro piano di projezione la Ed', o la Fd'.

ALITER.

99. Si ritrovi il punto h ove la retta data incontra il piano della sua projezione ab. Ed essendo dati i cateti hl, e l'altro che dinota l'altezza del punto dato su questo stesso piano di projezione, resterà determinato l'angolo che la retta data comprende colla ab, o sia l'inclinazione sua al piano di questa. Laonde il proposto problema si sarà ridotto al precedente (*n.*98).

PROP. XLII. PROBL.

100. *Esibire le projezioni e la grandezza della minima distanza di due rette date di sito nello spazio, e che non sieno in un medesimo piano*: cioè, determinare la perpendicolare comune ad esse.

Una delle rette date abbia per projezioni le ab, $a'b'$ (*fig.*29), e quelle dell'altra sieno le cd, $c'd'$. Sieno inoltre A$'h$, A$'h'$ le tracce del piano condotto per la prima di esse parallelo all' altra (*p* 36): è chiaro che tutte le perpendicolari ad un tal piano abbassate da'punti di quella retta, che gli è parallela sieno tra loro uguali, e siccome tra queste vi deve esser quella, che incontra

l'altra retta data per cui si è fatto passare il piano, si rileva perciò che una di esse presa ad arbitrio possa rappresentare in grandezza quella minima distanza, che si cerca. Ciò posto si prenda in $c'd'$ un qualunque punto e' il quale si projetti in e nella cd; saranno i punti e, e' le projezioni di un punto preso ad arbitrio nella retta parallela al piano $h'\mathrm{A}'h$, e le perpendicolari ef, $e'f'$ che da'punti c, e' si abbassano rispettivamente sulle $\mathrm{A}'h$, $\mathrm{A}'h'$ dinoteranno le projezioni della perpendicolare, che dal punto di cui quelli sono le projezioni si abbassa sul piano poc'anzi detto(n.77): che perciò se si determinino le projezioni g, g' del punto d'incontro di quella perpendicolare con questo piano, le eg, $e'g'$ rappresenteranno in grandezza le projezioni della perpendicolare definita tra il punto preso nella retta, che ha per projezioni le cd, $c'd'$ e il piano $h'\mathrm{A}'h$ che gli è parallelo, su cui quella si è abbassata, cioè della minima distanza cercata: che perciò si farà nota la grandezza di questa (p. 15). Resta ora a sapersi solamente il sito di essa, cioè a determinarsi in una delle rette date il punto donde abbassata la perpendicolare sull' altra, questa riesca anche perpendicolare alla prima. A tal oggetto per gli punti g, g' si conducano le gk, $g'k'$ parallele rispettivamente alle cd, $c'd'$; queste gk, $g'k'$ dinoteranno, com' è chiaro, le projezioni dell'intersezione di quel piano che passa per la retta che ha per projezioni le cd, $c'd'$, ed è perpendicolare al piano $h'\mathrm{A}'h$, con questo stesso piano, nella quale intersezione deve anche un tal piano $h'\mathrm{A}'h$ essere incontrato da tutte le perpendicolari che si è detto. Laonde i punti k, k' ove le gk, $g'k'$ intersegano le projezioni ab, $a'b'$ della retta ch' è in questo piano dinoteranno le projezioni di quel punto di esso, e della retta che vi esiste, donde elevata al piano, e quindi ad una tal

retta la perpendicolare, questa incontra l'altra retta data, e gli è anche perpendicolare, cioè, saranno le projezioni del punto di una delle rette proposte dal quale deve partire la perpendicolare ad esse comune: che perciò le projezioni di questa perpendicolare nel suo vero sito saranno le perpendicolari kl, $k'l'$ alle $A'h$, $A'h'$ rispettivamente; e le projezioni dell' altro punto ov' essa incontra l' altra retta data, saranno determinate dall' intersezione delle kl, $k'l'$ con le cd, $c'd$ rispettivamente, cioè i punti q, q'.

CAP. V.

DE' DETERMINANTI DEL SITO DELLE SUPERFICIE CURVE NELLO SPAZIO.

101. Le superficie curve di cui ci occuperemo nel presente capitolo sono le *cilindriche*, le *coniche*, e quelle di *rivoluzione*; poichè queste principalmente si considerano in natura e nelle arti di construzione. Riverremo poi su questo argomento per considerarne anche un' altra famiglia di cui talvolta occorre far uso. Bisogna però premettere le definizioni di esse in tutta quella generalità, che si conviene al presente trattato.

102. *Def* IX. Una linea curva la diremo data in un piano, se la troveremo descritta in questo, quantunque non se ne conosca la natura, e che non sia nè geometricamente, nè meccanicamente descrivibile.

103. *Cor.* Adunque una tal curva potrà anche aver le sue parti, continue, o discontinue che sieno, della stessa, o pur di diversa natura.

104. *Scol.* Dalla presente definizione si rileva, che ad una tal curva non si possa sempre condurre la tangente per mezzo di un artifizio geometrico; che perciò nella maggior parte de' casi converrà assegnarla a occhio, come suol praticarsi nel disegno.

105. *Def.* X. Se in un piano vi sia data una qualunque linea curva, e fuori di esso un punto di sito; e che una retta la quale passi per questo punto si aggiri sempre radendo quella curva; la superficie, che da essa verrà a generarsi si dirà *superficie conica*.

Quel punto fisso ne sarà il vertice; e la retta ge-

neratrice di essa, in qualunque luogo si ritrovi nel descriverla, si chiamerà *lato*.

O pure la superficie conica è quella che vien rappresentata dalle infinite rette, che da quel punto di sito si conducono agl' infiniti punti di quella linea curva, ch'è nel sottoposto piano.

106. *Scol.* Una tal superficie è necessariamente indefinita dalle due parti, come indefinita da queste parti stesse è la retta che la descrive; e potrà anche essere indefinita per uno, o due altri versi, secondochè indefinita per uno, o due versi sia la linea curva, che dirige il moto della retta rotante. Finalmente una tal superficie potrà esser composta di parti anche discontinue, e che non abbiano di comune, che il solo vertice, se mai discontinua, cioè a rami separati, sia quella tal curva direttrice.

107. *Def.* XI. Se in un piano vi sia data una qualunque linea curva, e sia di più dato il sito di una retta, che s' inclini ad esso; si chiamerà *superficie cilindrica* quella ch' è generata da un' altra retta, che rade continuamente la linea curva, ed è sempre parallela alla retta proposta: e tal retta generatrice in qualunque luogo si ritrovi nel descriver la superficie cilindrica, ne sarà un *lato*.

O pure la superficie cilindrica è quella, che viene rappresentata dalle infinite rette, che dagl'infiniti punti di quella curva si tirano parallele alla retta data di sito.

108. *Scol.* A questa definizione si potrà adattare, leggiermente modificandolo, lo stesso Scolio della definizione precedente.

109. *Def.* XII. Se in un piano vi sia segnata una curva di cui tutt' i punti abbiano un dato sito per rapporto ad una retta ch' è nel piano stesso; e supponendosi

immobile questa retta, quel piano si aggiri intorno ad essa: la superficie curva che in tal rivoluzione si verrà a generare dalla linea curva proposta, si dirà di *rivoluzione*; e quella retta fissa sarà il suo *asse*.

110. *Scol.* È chiaro che in questo moto ogni punto della linea curva generatrice descriverà un cerchio, il cui centro sarà quel punto ove l'asse è incontrato dalla perpendicolare tirata ad esso dal punto ch'è nella linea curva, ed il raggio è questa stessa perpendicolare. Ed una tal condizione dovrà riputarsi come essenziale alle superficie di rivoluzione.

Inoltre una tal superficie curva sarà indefinita per tutti que' versi, per gli quali erano indefiniti i rami della linea curva dalla quale è generata; e quella sarà inoltre continua, o discontinua, secondochè continue, o pur discontinue sono le parti di questa.

SCOLIO GENERALE.

111. Dalla genesi delle superficie cilindriche e coniche assegnata nelle loro definizioni sarà facile il dedurne, che segandosi una superficie conica con piani paralleli tra loro, le linee d'intersezione risultino simili e similmente poste; e che queste lo saranno affatto identiche nella superficie cilindrica. Ed una tal qualità potrà servire talvolta per criterio da discernere se una superficie curva si appartenga ad una di queste due specie.

Finalmente da tutte le definizioni precedenti si rileva chiaramente, che l'Analisi Algebrica non possa avere una completa applicazione alla teoria delle superficie curve; e che un tal metodo anzichè generalizzarne i risultati, non farebbe che restringerli, e quindi limitarne l'applicazione nella pratica delle Arti: poichè

l'Algebra non può prendere a considerare, che solamente quelle cose di Geometria, che hanno un'indole certa, e delle condizioni costanti, il che come si è veduto non si verifica affatto nelle considerazioni di cui ci stiamo occupando; e ciò senza tener conto delle grandi difficoltà ch' essa presenta nell' applicarsi alle teorie di sito. Che perciò mal si avvisano coloro, che imprendono a trattar le presenti quistioni con questo metodo, quasi recandosi a scorno di far servire la Geometria a se stessa. Essi non solamente pervengono così a risultati inconstruibili; ma particolarizzano inoltre le teorie generali che sulla genesi delle superficie curve la sola Geometria può comodamente stabilire.

PROP. XLIII. TEOR.

112. *I determinanti del sito di una superficie cilinlindrica nello spazio sono la posizione di quella linea retta cui è parallela la sua generatrice, ed il sito della sua traccia su di uno de' piani di projezione.*

Sieno ab, $a'b'$ (*fig.* 30) le projezioni di quella retta cui è parallelo ogni lato della superficie cilindrica, e pdq rappresenti la sua traccia sopra uno de' piani di projezione. Si prenda in questa curva pdq un qualsivoglia punto d, che si projetti in D' sull' altro piano di projezione; e per gli punti d, D' si tirino le de, D'e' parallele rispettivamente alle ab, $a'b'$: dinoteranno esse le projezioni di un lato della superficie cilindrica proposta, il quale incontra la curva pdq nel punto d, e che sarà dato di sito (*n.* 46). E similmente dimostrandosi, che sia dato il sito di ogn' altro lato di una tal superficie, essa verrà ad essere anche data di sito (*d.* 3).

PROP. XLIV. TEOR.

113. *I determinanti del sito di una superficie conica nello spazio sono il sito del suo vertice, e quello della sua traccia su di uno de' piani di projezione.*

Sieno a, a' (*fig.* 31) le projezioni del vertice di una superficie conica, e pdq la sua traccia sopra uno de' piani di projezione. Si tiri per a, la retta acd che seghi la traccia pdq nel punto d, il quale si projetti in D' sull'altro piano di projezione, e si unisca la D'a'; è chiaro che le Da, D'a' saranno le rispettive projezioni di quel lato della superficie conica proposta che passa per lo punto d della sua traccia. Adunque i sito di questo lato sarà dato; e così pure dimostrandosi dato il sito di tutti gli altri infiniti lati di quella superficie, essa sarà anche data di sito.

114. *Scol.* Per facilità maggiore nelle construzioni si è preso ne' due precedenti teoremi per uno de' determinati di una superficie cilindrica o conica la sua traccia su di uno de' piani di projezione: ciò però non deroga alla generalità de' determinanti del sito di esse. Imperocchè se questi nella superficie conica, per esempio, fossero stati il sito del vertice suo, e quello di una qualunque direttrice presa in un piano di sito, e data per le sue projezioni ab', $a'b'$ (*fig.* 32): facilmente si rileva, che preso nella ab un punto c, e projettatolo in c' nella $a'b'$, le congiungenti cd, $c'd'$ sieno le corrispondenti projezioni di quel lato di essa superficie che passa per quel suo punto, che ha per projezioni le c, c'. Ond'è che come poc'anzi ne sarebbe dato il sito. Ma chi non vede che in tal caso, determinandosi l'incontro e di esso lato col piano della acb, e così mano mano l'incontro di tutti gli altri

suoi lati col piano della stessa *ab*, si verrebbe a definire la traccia di quella superficie conica col piano della *acb*. Laonde questi nuovi determinanti si ridurranno a quelli esposti di sopra nel Teorema precedente. E lo stesso potrà dirsi per le superficie cilindriche.

PROP. XLV. TEOR.

115. *I determinanti del sito di una superficie di rivoluzione nello spazio, sono la posizione del suo asse, e quella della curva che la genera.*

Imperocchè è chiaro, che con questi determinant non possa generarsi, che la sola superficie curva proposta, della quale se ne potrà anche conoscere il corso e la natura, se tali cose sieno anche date per la curva, che la genera. Inoltre essendo *acb*, *a'c'b'* (*fig.*22) le projezioni della sua curva generatrice, ed LM, F'*f* le projezioni dell' asse suo e di questa; si potrà per ogni punto qualunque di tal curva, di cui ne sien date le projezioni *c*, *c'*, determinare la corrispondente ordinata in sito ed in grandezza (*p*. 31); che perciò sarà anche dato di sito e di grandezza quel cerchio, che da tal retta si descrive nel generarsi la superficie curva proposta. E lo stesso verificandosi per tutti i cerchi, che si possono in essa segnare segandola con piani perpendicolari al suo asse, ne segue che tal superficie curva debba esser data di sito.

CAP. VI.

DELLA MANIERA DI CONSTRUIRE UNA SUPERFICIE CURVA DATA DI SITO.

116. *Def.* XIII. *Construire una superficie curva data di sito* si dice allorchè di ciascun suo punto di cui n'è data una sola projezione, se ne cerca l' altra, cioè il sito.

117. *Scol.* La presente ricerca ha dunque per oggetto la determinazione di tutt' i casi del seguente Teorema : *S' è data di sito una superficie curva*, *sarà dato il sito d' ogni punto di essa*, *del quale ne sia data una sola projezione*, la cui verità è chiara; poichè si vede, che un tal punto non possa essere, se non uno di quelli ne' quali tal superficie curva è incontrata dalla perpendicolare elevata sul piano di projezione dalla projezione data del punto ; e noi per ora esibiremo tal determinazione per le superficie, che abbiamo definite nel precedente Cap., ne'seguenti Problemi.

PROP. XLVI. PROBL.

118. *Construire una superficie cilindrica data di sito.*

La curva (*fig.* 30) *pdq*, sia la traccia orizzontale di tal superficie, e le *ab*, *a'b'* dinotino le projezioni di quella retta alla quale è costantemente parallela la generatrice di essa : sia inoltre *c* la projezione data di un punto preso nella superficie proposta, e del quale se ne cerca l'altra projezione ; ed una tal pro-

jezione *c* esista primieramente nel piano della traccia *pdq* Si tiri per c la retta *ecd* parallela alla *ab*; una tal parallela sarà la projezione di quel lato, o di que' lati della superficie cilindrica, se mai ve ne sieno più, come può addivenire, in ciascun de' quali è allogato il punto che ha per projezione c, e ciascun di questi lati dovrà incontrare la traccia *pdq*, in quel punto corrispondente dove questa è intersegata dalla *ecd*. Adunque un di essi l' incontri in *d*. Si projetti questo punto *d* in D', e si tiri la D'c'e' parallela alla *a'b'*: quest' altra parallela sarà la projezione corrispondente di quel lato della superficie cilindrica proposta, che incontrava la traccia *pdq* in *d*, e nel quale deve contenersi il punto cercato; che perciò se si abbassi da c sulla LM la perpendicolare cC'c'; il punto c' ove questa intersega la D'e' sarà l' altra projezione del punto proposto, che ritrovavasi nel lato poc' anzi construito.

Che se la projezione data c' non esista nel piano di projezione in cui trovasi la traccia *pdq*; ma sì bene nell' altro : in tal caso si prenda ad arbitrio nella curva *pdq* un qualunque punto *g*, il quale si projetti sull' altro piano di projezione, e poi per tal altra projezione si tiri la *h'f'* parallela alla *a'b'*, ed una tal parallela incontri la LM in G', il qual punto si confonderebbe colla projezione poc'anzi detta del punto *g*, se i piani di projezione si supponessero ortogonali, come la figura gli rappresenta. Ciò posto si congiunga la gG', e poi per lo punto c' si conduca la e'c'D' parallela alla *a'b'*, e quindi alla *h'f'*, e tirata per D' la D'*d* parallela alla G'*g*, si conduca finalmente per *d* la *dce* parallela alla *ab*; saranno D'e', *de* le projezioni di quel lato della superficie cilindrica proposta, che incontra la traccia in *d*, e nel quale deve trovarsi allogato quel punto di cui c' n' è una projezione. Laonde

l'altra di queste dovrà essere il punto c ove intersegansi la de, e la perpendicolare indefinita $c'C'c$ abbassata sulla LM.

PROP. XLVII. PROBL.

119. *Construire una superficie conica data di sito.*

La soluzione di questo problema è identica a quella del precedente; e solamente bisogna avvertire, che ciascuna projezione di un qualunque lato di quest'altra superficie si ottiene congiungendo la projezione corrispondente di un punto ch'è in esso con quella del vertice, ch'è nello stesso piano di projezione. Lo che vedesi eseguito nella fig. 31.

PROP. XLVIII. PROBL.

120. *Construire una superficie di rivoluzione data di sito intorno ad un asse perpendicolare ad uno de' piani di projezione.*

Sia a (*fig.* 33.) la projezione dell'asse di una tal superficie su quel piano cui esso è perpendicolare, ed $a'A'$ rappresenti la projezione dell'asse stesso sull'altro piano di projezione, che potrà prendersi, senza che ne resti resa particolare la presente construzione, perpendicolare al primo. E poichè è dato il sito e la forma della proposta superficie curva di rivoluzione, dovrà esser dato il sito e la forma della sua curva generatrice in un piano di sito (*p.* 45), che suppongasi essere quello, che passando per l'asse, della proposta superficie curva, è parallelo al piano di projezione verticale, ed una tal curva sarà perciò identicamente rappresentata in projezione su quest'altro piano dalla $p'd'q'$. Ciò premesso si supponga primieramente, che la projezione data c di quel punto, ch'esi-

ste nella proposta superficie di rivoluzione, si ritrovi nel piano di projezione stesso ov'è il punto *a*, cioè sul piano orizzontale, e che si cerchi l'altra projezione di esso sul piano verticale. Si unisca la *ac*, e col centro *a* intervallo *ac* si descriva il cerchio *cde*, che intersegbi in *d* la retta *ad* parallela alla LM: egli è chiaro che le verticali elevate da' punti *c*,*d* debbano incontrare la superficie di rivoluzione proposta rispettivamente in punti ugualmente alti sul piano di projezione orizzontale; che perciò sarà lo stesso il cercare l'altezza di ciascun punto d'incontro della verticale che parte da *c* colla superficie data, che quella di quegli altrettanti punti ne' quali la superficie stessa è incontrata dalla verticale che parte da *d*. Or per adempiere a questo secondo oggetto, si abbassi da *d* sulla LM la perpendicolare *d*D'*d'*, sarà D'*d'* la projezione verticale della poc'anzi detta perpendicolare condotta per *d*; che perciò la projezione corrispondente di ciascuno di que' punti d'incontro dovrà cadere nella D'*d'*; ma tal projezione deve trovarsi anche nella curva *p'd'q'*; perchè tutt' i punti della generatrice della superficie proposta esistente nel piano verticale condotto per *ad* debbono esser projettati nella curva *p'd'q'*, come si rileva dalle cose poc'anzi dette. Laonde il punto *d'* ove la D'*d'* intersega la curva *p'd'q'* sarà la projezione di quel punto ove le proposta superficie di rivoluzione è incontrata dalla verticale condotta da *d*, e perciò D'*d'* rappresenterà l'altezza di questo sul piano orizzontale. Ma la stess'altezza orizzontale aveva anche, come si è detto, l'altro punto della stessa superficie ch' era projettato in *c* su di questo piano di projezione. Adunque l'altra projezione di quest' ultimo punto, cioè la verticale, verrà dinotata dall'intersezione *c'* della perpendicolare indefinita *c*C'*c'* abbassata da

c sulla LM, e della parallela $d'f'$ alla LM condottale per d'.

Che se al contrario fosse data la projezione verticale c' di un punto esistente in una superficie di rivoluzione data, e si cercasse l'altra projezione di esso sul piano orizzontale cui è perpendicolare l'asse di questa: si otterrebbe l'intento tirando per c' l'ordinata $d'c'f'$ alla curva $p'd'q'$, che rappresenta la projezione verticale della generatrice della proposta superficie, allorchè nel generarla si trova in sito parallelo al piano verticale; indi descrivendo col centro a e col raggio uguale a $d'f'$ il cerchio cde, ed abbassando da c' sulla LM la perpendicolare $c'C'cc$: tal altra projezione cercata sarebbe uno di que' due punti c,c ove tal perpendicolare intersega la circonferenza di quel cerchio.

121. *Cor.* Dalla construzione del precedente Problema si rileva anche in qual modo data una sola projezione di un punto esistente in una data superficie di rivoluzione intorno ad un asse verticale, si possa determinare il cerchio che si descriverebbe da un tal punto nel rivolgersi che farebbe la curva generatrice intorno all'asse.

CAP. VII.

DE' PIANI TANGENTI LE SUPERFICIE CILINDRICHE E CONICHE.

122. Questo Capitolo ed i due seguenti non formano che una sola dottrina, che si è distinta in varj Capitoli, per poterla esporre con più metodo. Tratteremo intanto in questo de' piani tangenti le superficie cilindriche e coniche, nel seguente de' piani tangenti le superficie di rivoluzione, e nell'altro poi de' contatti sferici.

123. *Def.* XIX. Un piano si dice toccare una superficie curva, allorchè tutt' i piani che nel luogo del contatto segano comunque il piano e la superficie curva, producono in quello delle linee rette tangenti rispettivamente le curve ch'essi segnano in questa.

124. *Cor.* Siccome bastano due sole rette ad angolo per fissare la posizione di un piano, si vede perciò che per determinare un piano tangente ad una superficie curva basta fissare le tangenti in un punto del contatto a due sole linee, che da due piani diversi vengono segnate in quella superficie da essi segata.

125. *Scol.* E da ciò si rileva, che se queste tangenti a quelle linee curve nel luogo del contatto riescono poi seganti ad esse nella continuazione del loro corso, anche il piano che sarà tangente la superficie curva in quel tal luogo, la segherà altrove.

126. *Def.* XV. Una superficie curva si dirà tangente ad un'altra, se quel piano tangente l'una nel luogo ov'esse s'incontrano sia tangente anche all'altra.

127. *Cor.* Ed è anche chiaro, che due superficie curve, le quali si toccano in un luogo, possano poi segarsi altrove.

128. *Def.* XVI. Per *normale* ad una superficie curva s' intende la perpendicolare al piano tangente nel luogo del contatto.

129. *Cor.* Che perciò il problema di *tirare la normale ad una superficie curva in un punto dato in essa* resterà risoluto per mezzo del n. 77, allorchè si sarà risoluto l'altro di tirarle per un tal punto un piano tangente; del che ci occuperemo quì appresso.

130. *Scol.* Siccome la tangente di una linea curva si ha come il prolungamento dell'archetto di essa, così il piano tangente una superficie curva si può avere come il prolungamento dell'elemento della superficie nel luogo del contatto: quindi la normale a quel piano tangente sarà anche normale all'elemento della superficie curva.

PROP. XLIX. PROBL.

131. *Tirare un piano tangente ad una superficie cilindrica data di sito, per un punto dato in essa.*

Sieno ab, $a'b'$ (*fig.* 30.) le projezioni di quella retta cui è costantemente parallela la retta generatrice della proposta superficie cilindrica, la quale superficie abbia per traccia sul piano della projezione ab la curva pdq; e sia finalmente c la projezione su questo piano stesso del punto dato nella superficie proposta.

Si tiri per c la retta cd parallela alla ab; dinoterà questa cd, com'è chiaro, la projezione orizzontale di quel lato della superficie cilindrica in cui si trova il punto dato, e l'incontro d di essa parallela colla curva pdq dinoterà il punto della direttrice, cioè della traccia pdq,

donde parte un tal lato. Or il piano tangente una tal superficie nel punto dato, dovendo toccarla in tutta l'estensione di un tal lato, dovrà necessariamente incontrare il piano della traccia *pdq* nella retta *d*K' che tocca in *d* questa curva. Adunque sarà questa retta la traccia del piano tangente cercato sul piano di projezione della traccia *pdq*. E construendosi l'altra projezione del punto dato (*p.* 46.), si potrà facilmente esibire l'altra traccia di un tal piano (*p.* 20.), il quale resterà perciò determinato (*p.* 19.).

132. *Scol.* Se la retta *cd* avesse incontrata la traccia *pdq* della superficie cilindrica in più punti, altrettanti sarebbero i lati di questa ne' quali poteva trovarsi quel punto dato per la sola projezione *c*, che perciò altrettanti piani tangenti si sarebbero potuti condurre a tal superficie in questo caso, ognun de' quali avrebbe avuto per sua traccia nel piano della projezione *c* la tangente corrispondente alla curva *pdq*.

PROP. L. PROBL.

133. *Tirare per un punto dato fuori di una superficie cilindrica data di sito un piano tangente a questa.*

Rappresenti *pdq* (*fig.* 34) la traccia della data superficie cilindrica, e siano *ab*, *a'b'* le projezioni di quella retta cui è costantemente parallela la generatrice di essa, e *c*,*c'* le projezioni del punto dato, per le quali si tirino le *cf*, *c'*F' parallele alle *ab*,*a'b'* rispettivamente; saranno queste *cf*, *c'*F' le projezioni di quella retta che dal punto dato si conduce parallela alla generatrice della superficie cilindrica proposta (*p.* 34.). Or una tale retta, com'è chiaro, deve esistere nel piano cercato; che perciò la traccia di questo sul piano della *pdq* dovrà passare per lo punto *f* in dove questo piano di projezione è incontrato da quella parallela. Ma una tale traccia deve inoltre esser tan-

gente alla traccia *pdq* della superficie cilindrica. Adunque essa sarà la *fd*K' che per lo punto *f* si tira tangente alla curva *pdq*. E la traccia di un tal piano tangente sull' altro di projezione si esibirà per mezzo della prop. xx.

Volendosi inoltre determinare le projezioni della linea di contatto di questo piano tangente colla superficie cilindrica : è chiaro che una delle projezioni di questa si otterrà tirando per *d* la *de* parallela alla *ab*, e l'altra coll'esibire la projezione D' del punto *d* sull' altro piano di projezione, e tirando poi per questa la D'*e'* parallela alla *a'b'*.

134. *Scol.* Se più tangenti si potessero condurre dal punto *f* alla curva *pdq*, altrettanti sarebbero i piani tangenti ad essa, che gli si potrebbero condurre pel dato punto ; e ciascun di questi avrebbe per sua traccia sul piano della *pdq* una di tali tangenti, e la traccia corrispondente si determinerebbe per mezzo della citata proposiz. xx. Che, se poi niuna tangente si possa condurre dal punto *f* alla curva *pdq* ; in un tal caso niun piano tangente si potrà condurre alla superficie cilindrica proposta dal dato punto fuori di essa. E da ciò resta pienamente determinato il precedente Problema .

PROP. LI. PROBL.

135. *Tirare un piano tangente una superficie cilindrica data di sito, il qual sia parallelo ad una retta di sito .*

Sieno *ch* , *c'h'* (*fig.* 35.) le projezioni della retta di sito cui deve esser parallelo il piano tangente una superficie cilindrica , che abbia per sua traccia la curva *pdq*, e per retta cui è costantemente parallela la sua generatrice quella che ha per projezioni le *ab* , *a'b'*.

Si faccia passare per la retta data di sito quel piano ch' è parallelo alla retta che ha per projezioni le ab, $a'b'$, e sia fl la traccia di questo piano su quello di projezione della curva pdq (p. 36.). È chiaro che il piano tangente cercato dovrà essere parallelo al precedente, e quindi incontrare il piano della curva dpq, in una retta tangente a questa, e parallela alla fl. Laonde si avrà la traccia di tal piano tangente, su quello di projezione ov'è la curva pdq, tirando a questa la tangente kdK' parallela alla fl: e tirando per K' la retta $K'k'$ parallela all' altra traccia $N'g'$ del piano che si è condotto parallelo alla generatrice della superficie cilindrica proposta, una tal parallela $K'k'$ sarebbe l' altra traccia del piano tangente cercato (n. 87.).

PROP. LII. PROBL.

136. *Condurre un piano tangente ad una superficie conica data di sito, per un punto dato in essa.*

La soluzione di questo Problema è interamente identica a quella del Problema risoluto nella Prop. XLIX.; e solamente bisogna avvertire, che le projezioni de' lati di questa superficie, com' è già noto, debbono passare tutte per le corrispondenti projezioni del vertice del cono dato.

PROP. LIII. PROBL.

137. *Condurre un piano tangente ad una superficie conica data di sito, per un punto dato fuori di essa.*

Anche la soluzione di questo problema si può condurre a fine nel modo stesso che quella della Proposizione L.

PROP. LIV. PROBL.

138. *Tirare un piano tangente una superficie conica data di sito, il quale sia parallelo ad una retta di sito.*

Per lo vertice del cono si tiri una retta parallela alla data (*p.* 34.); e poi per lo punto ove questa parallela incontra il piano di projezione ove sta la traccia della superficie conica, se ciò avviene, si tiri la tangente a questa traccia: una tal tangente sarà la traccia corrispondente del piano tangente cercato; e l' altra traccia si otterrà come nella Prop. 20.

Che se poi quella parallela non incontri il suddetto piano di projezione, si avrà la traccia su questo del piano tangente cercato tirando alla traccia della superficie conica una tangente parallela alla projezione corrispondente della retta, che si è condotta dal vertice suô parallela alla data.

E l' una l' altra di queste cose si comprendono abbastanza da loro stesse.

CAP. VIII.

DE' PIANI TANGENTI LE SUPERFICIE DI RIVOLUZIONE.

PROP. LV. PROBL.

139. *Tirare un piano tangente ad una superficie di rivoluzione il cui asse si supponga perpendicolare ad uno de' piani di projezione, per un punto dato in essa.*

Sia *a* (*fig.* 33.) la projezione dell'asse della superficie, data sul piano di projezione cui esso è perpendicolare, A'*a*' l'altra sua projezione su di un piano che suppongasi perpendicolare a questo primo; *p'd'q'* la projezione della generatrice di tal superficie nella posizione in cui è parallela al piano della A'*a*', la quale sarà perciò una curva identica a tal generatrice. Finalmente sia *c* la projezione del punto del contatto sul piano di projezione ove esiste il punto *a*, e *c*' dinoti la corrispondente projezione di esso sull' altro piano di projezione, la quale siasi determinata construendo la superficie proposta (*p.* 48.).

Or il piano tangente cercato dovendo esser quello, che passa per le tangenti condotte in questo punto dato al cerchio orizzontale che passa per esso, ed alla generatrice verticale della proposta superficie curva, dovrà la sua traccia orizzontale incontrare la *ac*, traccia corrispondente del piano verticale in cui esiste la poc'anzi detta generatrice, in quel punto ove essa *ac* è incontrata dalla tangente della generatrice stessa nel punto del contatto dato: e di più siccome il raggio di quel cerchio che va al punto del contatto è parallelo alla *ac*, e la tan-

gente un tal cerchio nel punto stesso è orizzontale, e quindi parallela alla traccia orizzontale del piano tangente cercato; perciò l'angolo che quelle due rette comprendono nel punto del contatto dovrà essere uguale a quello della *ac* colla traccia orizzontale di un tal piano tangente (15. El. XI.). Laonde questo sarà retto al pari di quello. Non resta dunque a far altro per esibire una tal traccia, che a determinare il punto ov' essa incontra la *ac*. Per ottenerlo basta riflettere, che la generatrice della superficie proposta esistente nel piano verticale che passa per *ac*, e il punto dato in essa hanno rispetto all' asse ed alla *ac* identico sito a quello, che ha la curva $p'd'q'$, che dinota tal generatrice rappresentata nel piano verticale di projezione, e'l punto d', rispetto alla A'a' ed alla A'M: che perciò se per lo punto d' si tiri la tangente d'H' alla curva $p'd'q'$, dinoterà la retta A'H' la distanza dal punto *a* alla quale la tangente la generatrice della proposta superficie curva che passa per lo punto dato in questa incontrava la *ac*. Laonde tagliando sulla *ac* la *ah* ugnale alla A'H', ed elevando da *h* sulla *ah* la perpendicolare *h*K', sarà questa la traccia orizzontale del cercato piano tangente: e la verticale si otterrà coll' ajuto della prop. 20.

PROP. LVI. PROBL.

140. *Condurre per una retta di sito un piano che tocchi una superficie sferica data.*

Prendasi per un de' piani di projezione quello cui è perpendicolare in un punto *f* la retta data (*fig.*36.), la quale avrà per conseguenza per sua projezione sull'altro piano di projezione la perpendicolare indefinita F'f' abbassata dal punto *f* sulla LM. Siano inoltre *a*, a' le

projezioni del centro della sfera, e il cerchio *pde* la projezione della stessa sul piano cui si è supposta perpendicolare la retta data: un tal cerchio dinoterà anche la traccia, su questo stesso piano, di una superficie cilindrica circonscritta alla sfera data, la cui generatrice sia una retta parallela alla data; e'l piano tangente dimandato sarà, com'è chiaro, quello stesso, che per un punto qualunque della retta data si condurrebbe a questa superficie cilindrica, cioè avrà per sua traccia sul piano del cerchio *pde* la tangente *fd*, che dal punto *f* si conduce a questo cerchio, e l'altra traccia sarà la perpendicolare elevata alla LM nel piano verticale dal punto K' ov'essa è incontrata dalla *fd*.

LEMMA.

141. *Dati in un piano due cerchi di grandezza e di sito; condurre ad essi una tangente comune.*

ANALISI GEOMETRICA.

Sia DQ (*fig.*37.) una tangente comune a' due cerchi PDE, QGH dati come poc'anzi si è detto; tirati i raggi AD, QB a' punti de' contatti risulteranno simili i triangoli ADK, BQK, e quindi starà AD : BQ :: AK : KB: laonde sarà dato nella congiungente AB de' centri de' cerchi dati il punto K per dove deve passare la tangente comune ad essi.

COMPOSIZIONE GEOMETRICA.

Si prenda nella AB il punto K in modo che stia AK : KB :: AD : BQ; e per K si tiri la tangente all'un cerchio; questa dovrà toccare anche l'altro. E ciò è facile a dimostrarsi.

142. *Scol.* 1. È facile il rilevare dalla soluzione del precedente problema, che nella congiungente AB i centri de' cerchi dati vi esistono due punti K diversi, da ciascun de' quali può condursi ad essi cerchi una tangente comune: ed un di questi punti tra i centri A,B, l'altro nella AB prolungata dalla parte del cerchio minore.

143. *Scol.* 2. Avrei qui volentieri tralasciata la soluzione del problema risoluto nel precedente lemma, come esercizio di scuola, se non fossi stato spinto a recarvela dal trovarne di esso nella Geometria Descrittiva del Signor La Croix una soluzione particolare identica a quella esposta dal Clavio nello Scol. della prop. 17 del suo Euclide, e che non per tanto quel sommo analista francese la dà come d'incerto autore, e semplicissima.

PROP. LVII. PROBL.

144. *Condurre un piano tangente a due superficie sferiche date di grandezza e di sito, e che passi per un punto dato.*

Dinotino i punti a, a' (*fig.* 38.) le projezioni del centro di una di tali sfere, b, b' quelle del centro dell' altra, e c,c' le projezioni del punto dato. S' intendano esse sfere segate da un piano parallelo a quello delle projezioni a,b,c, , e sieno i cerchi pde,gqh le rispettive projezioni prodotte da quel piano segante nelle sfere, cioè le projezioni delle sfere stesse. Ciò posto, si conduca a' cerchi pde,gqh la tangente comune dqk (*lem. preced.*), sarà questa, com' è chiaro, la projezione della tangente comune corrispondente in que' cerchi che sono prodotti nelle sfere dal piano segante suddetto, ed il punto k sarà la projezione sul piano abc di quel punto ove la poc' anzi detta tangente incontra la congiungente i

centri delle sfere date ; ed il quale può prendersi come il vertice di quel cono che viene a generarsi dalla suddetta tangente, se essa si concepisca rivolgersi insieme co' semicerchi generatori delle sfere esistenti nel piano segante, intorno alla congiungente i centri di queste ; e l'altra projezione di questo vertice sul piano $a'b'c'$ sarà l'incontro k' della perpendicolare indefinita $kL'k'$ alla LM colla $a'b'$.

Or il piano tangente cercato deve toccare anche una tal superficie conica, e quindi passare per quel punto che ha per projezioni le k,k', o sia esso piano dovrà passare per la retta di sito che ha per projezioni le $ck,c'k'$: che perciò il proposto problema si è ridotto al precedente, cioè a tirare per tal retta di sito un piano tangente ad una delle sfere date.

145. *Scol.* Essendo due in diversa posizione le tangenti comuni che possonsi condurre a due cerchi (*n.* 142.) ne segue, che anche due diverse sieno le superficie coniche circonscrittibili a due sfere, una cioè che le inviluppa in una sola superficie conica, l'altra, che le chiude in due opposte : e siccome a ciascuna di queste possonsi tirare due piani tangenti, saranno perciò quattro i piani tangenti due sfere, ed i quali passano per un punto dato ; e due di essi le toccheranno da una parte stessa, due altri in sensi opposti.

LEMMA.

146. *Se in un piano vi esistano tre cerchi dati di grandezza e di sito, e ad essi, presi due per volta, si tirino le tangenti comuni, i tre punti ove queste concorrono colle rispettive congiungenti de' loro centri, debbono trovarsi allogati in una retta di sito.*

Si tiri per c (*fig.* 39.) centro di uno de' tre cerchi dati la retta cl parallela alla congiungente i centri b,a degli altri due, ed una tal parallela si prolunghi fino ad incontrare in l la retta fd che unisce i punti di concorso f,d delle tangenti comuni a' cerchi a,b; a,c, e che è data di sito; poichè unisce i punti f,d dati di sito: sia in fine e il concorso delle tangenti comuni a' cerchi a,c: dico che un tal punto debba trovarsi allogato nella fd.

S' indichino con R,R',R" rispettivamente i raggi de' tre cerchi che hanno per centri i punti a,b,c. E perchè deve stare R : R' :: $af:fb$ (*n.* 141.), ed R' : R" :: $bd:dc$, cioè :: $bf:cl$; sarà per ugualità R : R" :: $af:cl$. Ma è poi R : R" :: $ae:ec$: quindi il punto e dovrà trovarsi allogato nella fd.

147. *Scol.* La dimostrazione di questa verità elementare, ch' è come si vede, una conseguenza immediata dell' analisi geometrica del lemma problematico esposta al num. 141. è stata da' sommi Analisti Francesi Monge, e La-Croix dedotta da considerazioni fondate su i piani tangenti, che possono condursi a tre sfere date; ed il secondo di essi nella prima edizione della sua Geometria Descrittiva la credè inoltre *forse non facile a dimostrarsi a priori.* Veggasi la Geometria Descrittiva del Monge, e la citata edizione di quella del La-Croix.

PROP. LVII. PROBL.

148. *Tirare un piano tangente a tre superficie sferiche date di grandezza, e di sito.*

Pe' centri *a,b,c* (*fig.* 39.) delle tre sfere date si concepisca passare un piano il quale prendasi per uno di quelli di projezione; e poi si tirino ad essi cerchi presi due a due le tangenti comuni, le quali concorrano colle rette che congiungono i loro centri rispettivamente in *f*, *d* ed *e*; sarà data di sito la retta *fed*, che passa per essi (*lem. prec.*). E perchè ciascuna di quelle tangenti rivolgendosi insieme co' due cerchi che tocca intorno alla congiungente de' centri di questi descrive una superficie conica, tangente le sfere da tali cerchi descritte, si verrebbero perciò in tal rivoluzione a descrivere tre coni circonscritti alle tre sfere date, ed a ciascun de' quali verrebbe ad esser tangente il piano, che deve toccar le sfere; che perciò un tal piano dovrà passare pe' loro vertici, e quindi per la retta di sito *fed*. Laonde il proposto problema si è ridotto all'altro di condurre per la retta di sito *fed* un piano tangente ad una di quelle sfere.

149. *Scol.* Poichè, come fu detto al num. 142, a due cerchi possonsi condurre due tangenti comuni in diversa posizione, saranno perciò sei que' punti in dove le tangenti condotte a tre cerchi presi due per ogni volta incontrano le rispettive congiungenti de' loro centri, cioè *f,e,d,k,h,g*, e questi presi tre a tre nel seguente modo, cioè *f,e,d*; *f,k,g*, *e,k,h*; *d,g,h*, si troveranno allogati nella stessa retta di sito, cioè *fed* pe' tre primi, ed *fkg,ekh,dgh* per gli altri rispettivamente. Laonde il proposto problema resterà sempre risoluto per qualunque di queste quattro rette si conduca un piano tangente ad

una delle tre sfere date: e siccome per una retta si possono condurre ad una sfera due piani tangenti; perciò saranno otto diversi i piani tangenti tre sfere date, de' quali però due, cioè quelli che passano per la retta *fed* toccano le sfere tutte tre da una stessa parte; mentre ciascuno de' rimanenti tocca sempre due sfere da una parte, e la terza dalla parte opposta, come facilmente si ravvisa.

LEMMA PROBLEMATICO

150. *Ad una data superficie di rivoluzione circonscrivere una superficie cilindrica, la cui generatrice sia perpendicolare ad un piano dato.*

Per l' asse BA (*fig.*40) della proposta superficie di rivoluzione si concepisca condotto un piano perpendicolare al dato *a*A'M, e questi piani prendansi per quelli di projezione. Inoltre la curva BCAD esistente nel piano condotto per l' asse AB sia la generatrice della proposta superficie; e ad una tal curva si conducano le tangenti CC', DD' perpendicolari alla LM, cioè al piano dato *a*A'M. Egli è chiaro che queste tangenti dinoteranno que' lati della superficie cilindrica cercata, ne' quali è questa intersegata dal piano BA'M. Ciò posto per qualunque punti dell' arco CBD, come *e'*, *f'*, ec. si abbassino alla LM le perpendicolari *e*'EE', *f*'FF', ec. che dinoteranno le projezioni corrispondenti di altrettanti lati della superficie cilindrica cercata, de' quali se ne determinerà il vero sito, cioè i punti rispettivi d' incontro col piano *a*A'M, nel seguente modo.

Dal punto D sull' asse AB si abbassi la perpendicolare D*d*; e poi presi nell' arco C*d* i punti K, G, ec. si abbassino da essi sull' asse medesimo le perpendicolari KH, GN, ec. Finalmente per le *e*'EE', *f*'FF' ec.,

e per le KH, GN, ec. s' intendano passare de' piani perpendicolari al piano BA'M : è chiaro che i primi di questi piani intersegheranno la superficie cilindrica, ciascuno in un lato corrispondente in projezione alle rette e'E', ƒ'F, ec. per cui si è condotto, e la superficie di rivoluzione in una curva cui tal lato è tangente; e che i secondi di que' piani segneranno nella stessa superficie di rivoluzione tanti cerchi, i cui rispettivi diametri saranno le KH, GN, ec. E per ultimo si concepisce facilmente, che ciascun di que' primi piani con ciascun di questi secondi debbano intersegarsi scambievolmente in una retta perpendicolare al piano BA'M in quel punto, ove intersegavansi le rette per le quali essi si sono condotti, vale a dire in P pe' piani condotti per le Fƒ, e GN, in Q per gli altri che passano per le Fƒ, KH; e così in seguito.

Or supponiamo che vogliasi determinare il lato del cilindro ch' è projettato in ƒF'. Sulla GN si descriva il semicerchio GRN, al quale si tiri per P la semiordinata PR, questa dinoterà la perpendicolare al piano BA'M in P, sino alla superficie curva di rivoluzione; ed una tal perpendicolare dovendo esistere anche nel piano condotto per ƒ'F', dovrà anche esprimere la semiordinata che corrisponde nel punto P alla curva d' intersezione del suddetto piano colla superficie data di rivoluzione: che perciò se dal punto P si elevi alla ƒF, che si prenda per asse di questa curva, la perpendicolare PT uguale a PR, il punto T si apparterrà ad una tal curva, supposto che essa siasi abbattuta sul piano BA'M. Similmente descrivendo sulla KH il semicerchio KSH, tirando in esso per Q la semiordinata QS, e poi prendendo nella perpendicolare QV alla ƒF la QV uguale alla QS, il punto V si apparterrebbe anche alla curva suddetta. E così facendo

continuamente si verrebbe a descrivere per punti sul piano BA'M una tal curva, che venghi dinotata dalla $fTVF$. Or se a questa si conduca la tangente XX' perpendicolare alla LM, e poi si concepisca la curva e la tangente rivolgersi intorno alla fF', finchè il suo piano divenghi perpendicolare all'altro BA'M; in questo sito quella tangente dinoterà, com' è chiaro, quel lato della richiesta superficie cilindrica il quale è projettato in fF': che perciò l'incontro di esso col piano aA'M si avrà descrivendo col centro F', intervallo F'X' l'arco di cerchio X'x. Sarà dunque x un punto della traccia della superficie cilindrica cercata sul piano aA'M; e similmente determinandosi gli altri punti di questa, si verrà finalmente a descrivere la curva C'xD' che la rappresenta.

151. *Cor.* I. Le projezioni del punto di contatto X, quando il lato XX' del cilindro è nel suo vero sito, saranno il punto x, e l'altro x' dove la fF' è incontrata dalla parallela Xx' tirata per lo punto X, ch'è nella figura, alla LM.

152. *Cor.* II. E quindi la curva di contatto della superficie cilindrica circonscritta alla proposta superficie di rivoluzione avrà per sue projezioni rispettive la curva C'xD', e l'altra che passa per tutti que' punti x', e per gli altri G, D.

153. *Scol.* In una maniera analoga a quella del precedente Problema si potrebbe risolvere l'altro di: *Descrivere una superficie conica tangente una data superficie di rivoluzione, e che abbia per vertice un dato punto*. In tal caso converrebbe prendere il piano di projezione orizzontale perpendicolare all'asse della superficie data; il piano verticale dovrebbe passare pel punto dato e per quest' asse, ed esso rivolgendosi intorno all' altezza orizzontale del punto dato dovrebbe costituire la serie de' piani seganti la cercata superficie

conica in que' lati di essa, che toccano le corrispondenti linee curve, nelle quali tali piani intersecano la superficie di rivoluzione proposta.

PROP. LIX. PROBL.

154. *Condurre per una retta di sito un piano che tocchi una data superficie di rivoluzione.*

Si prenda per piano di projezione orizzontale quello cui è perpendicolare in z (*fig.* 40) la retta data di sito; e s' intenda alla proposta superficie di rivoluzione circonscritta quella superficie cilindrica la cui generatrice è perpendicolare a questo piano (150), e quindi sempre in un piano colla retta data: egli è chiaro, che ogni piano tangente tal superficie cilindrica debba anche toccare la proposta superficie di rivoluzione in un punto della linea di contatto di questa con quella. Laonde se per z si tiri alla traccia orizzontale C'xD' di quella superficie cilindrica la tangente zy, sarà questa la traccia orizzontale del piano tangente cercato, il quale essendo verticale, sarà perciò pienamente determinato. Ed una delle projezioni del punto di contatto sarà il punto y, l' altra quel punto dove la perpendicolare yY' abbassata sulla LM incontra nel piano verticale la projezione verticale della linea di contatto della superficie di rivoluzione proposta e della cilindrica che gli si è circonscritta (152). C. B. F.

155. *Scol.* Un tal problema si sarebbe potuto anche risolvere, descrivendo una superficie conica tangente la superficie di rivoluzione, e che avesse per vertice un punto preso nella data retta di sito, e poi conducendo a tal superficie conica un piano tangente per un altro punto della retta stessa. Ma la soluzione che vi abbiamo recata, oltre all' essere più semplice, ha il

merito di procedere sugli stessi principj di construzione su i quali era fondata quella del caso particolare del problema presente, che per ragion di metodo si era già risoluto nella Prop. LVI.

PROP. LX. PROBL.

156. *Tirare ad una superficie di rivoluzione un piano tangente parallelo ad un piano dato.*

Sia, come nella prop. LV. (*fig.* 41.), *a* la projezione dell' asse della superficie data sul piano di projezione cui esso è perpendicolare, A'*a*' l'altra sua projezione su di un piano che suppongasi perpendicolare a questo primo, *p*'*d*'*q*' la projezione della generatrice di tal superficie nella posizione in cui è parallela al piano verticale di projezione, la quale sarà perciò una curva identica a tal generatrice. Finalmente sieno E'*f*, E'*f*' le tracce di quel piano cui deve esser parallelo quello che si vuol tirare tangente alla superficie proposta.

Si supponga passare per l'asse della superficie data un piano perpendicolare al dato *f*E'*f*; un tal altro piano avrà per sue tracce la *ga*H' perpendicolare alla E'*f*, e la H'*h*' perpendicolare alla LM, ed intersegherà il piano *f*E'*f*', ed il piano tangente che si cerca in due rette parallele tra loro; vale a dire che la tangente della generatrice della proposta superficie curva in quel punto ov' essa è toccata dal piano tangente che vuol tirarsi deve essere parallela alla comune sezione de' piani *f*E'*f*', *g*H'*h*'; e l'asse della superficie proposta dovendo incontrare il piano dato nella sua comune sezione coll' altro *g*H'*h*', la projezione di tal punto d' incontro sul piano della *p*'*d*'*q*' dovrà essere il punto *b*' ove s' intersegano la projezione A'*a*' di quell' asse, e l' altra della comune sezione suddetta, la

quale si determina facilmente, come nella prop. xxv.

Or si concepisca quel piano verticale condotto per l'asse rivolgersi intorno a questo, fintantochè divenga parallelo all' altro di projezione verticale, cioè finchè la sua traccia gaH' sia parallela alla LM; in un tal caso tutto quello ch' è in esso segnato, cioè la curva generatrice della superficie proposta, la comune sezione di esso col piano dato, e la tangente la suddetta curva parallela a quella comune sezione, avranno un identico sito alle loro projezioni sul piano di projezione verticale; che perciò se col centro a, intervallo ag si descriva l' arco gk, il punto k darà il luogo ove la comune sezione de' piani fEf', $gH'h'$ incontra il piano orizzontale di projezione, allorchè il piano $gH'h'$ passa nel nuovo sito; e se un tal punto k si projetti in K', congiunta la K'b' sarà questa la projezione verticale di quella parte di tal comune sezione, ch' è interposta tra l' incontro di essa coll' asse della superficie data, e 'l punto k; e da quello che si è detto la K'b' rappresenterà anche la vera posizione di tal retta per rapporto alla curva generatrice della superficie proposta. Laonde se alla curva $p'd'q'$ si tiri la tangente $d'l'$ parallela alla K'b', questa dinoterà la tangente alla curva proposta nel luogo ov' essa è incontrata dal piano tangente cercato, cioè sarà d' il punto del contatto; che perciò projettandosi il punto d' in d sulla ak, e poi descrivendosi un cerchio col centro a intervallo ad, il punto c ove la circonferenza di questo cerchio intersegherà la gaH', rappresenterà la projezione orizzontale di quel punto di contatto di cui la projezione verticale sarà il punto c ove incontransi la parallela alla LM tiratale per d', e la perpendicolare abbassatale da c. Ed il problema presente si sarà ridotto all' altro risoluto nella prop. LV.

CAP. XI.

DE' CONTATTI CIRCOLARI, E SFERICI.

157. Le ricerche che proporrò in questo capitolo sono dirette a risolvere in una maniera semplice e geometrica due principalissimi problemi, quello cioè de' tre cerchi da farsi toccare da un quarto, e l' altro delle quattro sfere da farsi toccare da una quinta. Mi sono indotto ad inserire tali problemi nel presente trattato, primieramente per la loro natura analoga all' argomento de' due precedenti capitoli, e poi perchè l' impegno che vi hanno posto in risolverli i più celebri Geometri moderni, tra quali il Vieta, il Fermat, il Newton, e l' Eulero, m' imponevan l' obbligo di trattarne, or che del primo di essi dal Sig. Fergola, e dell' altro da me se ne sono date delle soluzioni uniformi, ed eleganti. Chiunque vorrà vedere risoluti per mezzo di un medesimo principio tutti gli altri problemi di queste due famiglie potrà riscontrare le due nostre Memorie, inserite nel primo volume degli Atti della Reale Accademia delle Scienze di Napoli, che ora sta stampandosi, e la cui pubblicazione sarà forse contemporanea a quella del presente trattato. Tali altre soluzioni però non hanno alcuna difficoltà, e possonsi da ognuno supplire dopo quello che qui ne reco de' principali problemi tra esse (*).

(*) Tutt' i problemi della prima famiglia, cioè quelli delle *Tazioni*, così detti dagli antichi, furono dal Pappo compresi in questa generale enunciazione: *Punctis, et rectis lineis, et circulis tribus quibuscunque positione datis, circulum describere per unumquodque datorum punctorum, qui unamquamque linearum datarum*

Alle ricerche che forman l' oggetto di questo Capitolo ve se ne troveranno aggiunte altre non meno importanti, che hanno con esse una grandissima affinità. Finalmente conviene avvertire, che di tali problemi io qui ne distendo solamente le analisi geometriche, senza punto impegnarmi a comporli, o a divisarne i casi diversi; perchè queste cose possonsi di leggieri supplire da qualunque giovanetto, e ciò o servendosi de' dati, e quindi construendoli geometricamente, o pur de' determinanti de' dati su due piani ad angolo, come si è fatto nelle construzioni del presente trattato.

158. *Def.* Se nella base di un triangolo, e dal punto medio di essa si prenda una terza proporzionale in ordine alla semibase, ed alla semidifferenza de' lati, la perpendicolare elevata su detta base dall' estremo di tal retta si dirà *Direttrice* di quel lato verso del quale questa si è presa.

159. Così la base AB (*fig.* 42) del triangolo ADB si bissechi in C, e presavi la retta CP terza proporzionale dopo le due rette AC ed $\frac{1}{2}$ (DB—DA), si elevi ad AB dal punto P la perpendicolare PS; questa potrà chiamarsi la direttrice del lato AD il quale colla PS è dalla stessa parte del punto C. E prendendovi C*p* uguale a CP, ed alzata dal punto *p* la *ps* perpendicolare ad AB, sarà la *ps* direttrice del lato DB, per esser le due rette *ps* e DB dall' altra parte del punto C, cioè amendue a destra di C, come si vede.

---

contingat. E ad imitazione di Pappo il Fermat comprese tutti quelli dell' altra famiglia de' contatti sferici nella seguente generale enunciazione. *Quaerenda sit sphoera, quae per data puncta transeat, aut sphoeras, et data plana contingat*; al che conviene solamente aggiugnere, che tali cose date debbono essere sempre al numero di quattro.

PROP. FONDAMENTALE TEOR.

160. *Se diasi la base AB del triangolo ADB, e la differenza de' lati di esso DB, DA, ciascuno di questi due lati avrà una data ragione alla perpendicolare abbassata dall' angolo verticale D sulla sua direttrice.*

Dim. Cas. 1. Col centro D, intervallo DA, che sia il minore de' due lati del proposto triangolo, si descriva il cerchio EAV, e l' altro lato DB si prolunghi insino alla circonferenza in E, e si bissechi la BA in C, e la BV in G, sarà AC : BG :: BG : CP; e quindi $BG^2 = AC \times CP$, e prendendo i loro quadrupli anche $BV^2 = AB \times 2CP$. Ciò premesso dal punto D si abbassi la DR perpendicolare ad AB, e vi si prenda Cr uguale alla CR; sarà la rimanente parte rB uguale alla rimanente RA: e quindi Rr, ch' è la differenza delle due RB ed rB, sarà uguale alla differenza de' due segmenti RB ed RA della base del triangolo, cioè alla BH. Vale a dire l' è $2CR = BH$, e $BH - 2CP = 2CR - 2CP = 2PR$.

Or per la natura del cerchio il rettangolo EBV è uguale all' altro ABH. Dunque togliendo da essi rispettivamente il quadrato di BV, e 'l suo uguale rettangolo di AB in 2CP; come si è dimostrato precedentemente, resterà il rettangolo EVB uguale all' altro di AB in BH—2CP, cioè di AB in 2PR. E quindi sarà EV a 2PR, cioè prendendone le metà loro, AD a DS, come AB a BV, la qual ragione è data.

Cas. 2. L' aggregato de' due rettangoli EBV e BV^2 è uguale alla somma degli altri due ABH ed $AB \times 2PC$, che a quelli si sono mostrati rispettivamente uguali.

Dunque sarà $2DB \times BV = AB \times (BH + 2PC) = AB \times (2CR + 2PC) = AB \times 2Rp$. E quindi starà DB ad Rp, o alla sua uguale Ds nella data ragione della base AB alla BV differenza de' lati.

LEMMA I. PROBLEMATICO

161. *Dato di posizione il punto B (fig. 43) e la retta AH terminata in H; inclinare da quel punto su di questa retta la BC, la quale stia al segmento CH troncatone da essa su di quella in una data ragione, cioè della retta m all' altra n.*

Soluzione geometrica.

Prendasi Hc uguale ad n. Si congiunga la BH, e dal punto c si adatti sulla BH la cb uguale ad m. Di poi da B si conduca la BC parallela alla bc: sarà BC a CH, come bc a cH, pe' trangoli simili BCH, bcH, cioè come m ad n.

Soluzione analitica.

Dal punto B si abbassi la BK perpendicolare alla AH; poi pongasi $BH = a$, $HK = b$, $BK = c$, e $KC = x$. Sarà $HC = b - x$, e $BC = \sqrt{(cc + xx)}$. E per le condizioni del problema dovrà stare $\sqrt{(cc + xx)} : b - x :: m : n$; onde avrassi la seguente quadratica equazione

$$cc + xx = \frac{mm}{nn}(b - x)^2$$

Che agevolmente potrà ordinarsi, risolversi, e geometricamente construirsi. Ella intanto ha due radici, onde due punti dovran rinvenirsi, quando il problema non sia impossibile. E due punti anche rilevansi dalla precedente soluzione geometrica, ma nella BH.

PROP. LXI. PROBL.

162. *Dati di posizione e di grandezza i tre cerchi GK, MN, RE (fig. 44), descriverne un altro, che insiem tocchi que' tre cerchi dati.*

Analisi geometrica.

Si concepisca essere il punto C il centro del cerchio da descriversi, e da esso a' centri B, A, D de' cerchi dati si conducano le rette CB, CA, CD, e si tirino benanche le altre AB, AD. Sarà data di grandezza la retta AB base del triangolo ACB, e vi sarà anche data la differenza de' lati di esso, ch'è AM — GB. Dunque, per la proposizione fondamentale (160), sarà data di sito la PS direttrice del lato AC, e vi sarà data la ragione di un tal lato AC alla CS, che dal punto C si mena perpendicolare alla PS.

In simil modo si dimostrerà esser data la ragione di AC a Cs perpendicolare calata dal punto C sulla ps direttrice dello stesso lato AC nel triangolo ACD. Dunque sarà data la ragione de' due lati CS e Cs del quadrilineo CSHs, i cui angoli sono dati. Ed ei sarà dato di specie, e la sua diagonale HC sarà data di posizione. Il perchè essendo date, per la proposizione fondamentale, e per esser dato di specie il triangolo CSH, le due ragioni di AC a CS, e di CS a CH, sarà anche data quella di AC a CH. E quindi la presente indagine si ridurrà al precedente lemma problematico (161).

163. *Scol.* A questo Probl. si riduce immantinente l'altro di: *Descrivere una sfera che tocchi tre altre sfere date di grandezza e di sito, e che abbia il suo centro*

nel piano che passa pe' centri di quelle. Imperocchè è chiaro, che il cerchio generatore della sfera cercata sia per l' appunto quello che tocca i tre cerchi generatori delle date, segnati in esse dal piano che passa pe' loro centri.

LEMMA II. TEOR. LOCALE.

164. *Tutti que' punti, da ciascun de' quali abbassandosi le perpendicolari su tre piani di sito che s' incontrano, queste serbansi tra loro costantemente la stessa ragione, che le tre rette date m, n, r debbono essere allogati in una retta di sito.*

Sieno MN, RS, TV (*fig.* 45) i tre piani dati di sito, e sia primieramente X un punto dal quale se si abbassino su i due di essi MN, RS le perpendicolari BX, CX, sieno queste tra loro come *m* ad *n*. Si concepisca per la comune sezione RN di questi due piani, e per lo punto X condotto un altro piano, nel quale si prenda un qualsivoglia punto x, e si prolunghi la Xx, che unisce quel punto con questo, fino alla RN in Z, e poi congiungansi le BZ, CZ. Finalmente dal punto x su de' piani MN, RS si abbassino le altre perpendicolari bx, cx, le quali, è chiaro, che debbano cadere nelle BZ, CZ, ed esser quindi tra loro come le BX, CX, cioè nella ragione di *m* ad *n*. Quindi il piano RXN sarà il luogo geometrico di tutti i punti X, x, ec. da' quali abbassate le perpendicolari su i piani dati MN, RS, sieno queste tra loro come *m* ad *n*.

Similmente il luogo geometrico di tutti que' punti da' quali abbassate le perpendicolari su i piani RS, TV sieno queste tra loro nella ragione data di *n* ad *r* si troverà essere un altro piano di sito condotto

per la TS. Dunque la comune sezione di quel piano con questo sarà il luogo geometrico di que' punti da ciascun de' quali abbassandosi le perpendicolari su de' tre piani di sito MN, RS, TV, sono esse tra loro nella ragione delle rette date m, n, r.

Ciò posto ecco in qual modo resterà determinato il sito del luogo geometrico suddetto. Poichè tutti que' punti da' quali abbassate le perpendicolari su i piani MN, RS, queste sono nella ragione data di m ad n, debbono essere allogati in un altro piano, che passa per la RN, sia X uno di tali punti (*fig.* 46), e si prolunghi la CX, una delle due perpendicolari, quella al piano RS, finchè incontri l' altro piano MN, sarà data la ragione di BX ad XN, per esser dato di specie il triangolo BXN in cui oltre l' angolo retto vi è dato l' angolo in N complemento di quello d' inclinazione de' piani dati; ma è anche data la ragione di BX a CX. Dunque è data la ragione di CX ad XN; e sarà perciò dato il punto X per dove passa il piano RXN (*fig.* 45); che perciò un tal piano sarà dato di sito. E similmente determinando il sito di quell' altro piano che passa per la TS, e ch' è il luogo geometrico di que' punti donde abbassando su i piani di sito RS, TV le perpendicolari, queste sono nella ragione data di $n : r$, si vedrà esser anche dato il sito della comune sezione di questi piani, ch' è il luogo geometrico in quistione.

LEMMA III. PROBLEMATICO.

165. *Determinare in una retta di sito un punto, il quale se congiungasi con un altro dato, e da esso si abbassi la perpendicolare su di un piano di sito, sia quella congiungente in una data ragione a questa perpendicolare.*

ANALISI GEOMETRICA.

Sia MN (*fig.* 47) il piano di sito, ed A il punto dato: e rappresenti O quel punto della retta di sito QO, dal quale abbassata sul piano MN la perpendicolare OP, e congiunta la OA, sieno queste due rette tra loro nella data ragione di $m : n$.

S'intenda condotta per la retta di sito QO un piano perpendicolare al dato MN, dovrà in questo giacerne la OP; ed il triangolo POQ essendo dato di specie, sarà data la ragione di OP ad OQ. Ma è anche data la ragione di AO ad OP; quindi sarà pur data la ragione che componesi da queste due, cioè quella di AO ad OQ: ond'è che il problema proposto riducesi ad inclinare dal dato punto A fuori della retta di sito QO terminata in Q, a questa retta, la AO, la quale stia al segmento OQ che da essa ne tronca, verso il punto Q, in una ragion data, cioè al Lemma Problematico del Sig. Fergola.

PROP. LXII. PROBL.

166. *Date quattro sfere di grandezza e di sito, descriverne un' altra che le tocchi.*

ANALISI GEOMETRICA.

Sieno A, B, C, D (*fig.* 48) i centri delle sfere date, ed O il centro di quella da descriversi, il qual si congiunga co' centri delle date per mezzo delle OA, OB, OC, OD, e si conducan pure le AB, AC, AD. Ciò posto nel triangolo AOB essendo data la base AB, e la differenza de' lati BO, OA, sarà dato il punto E

della base per dove passa la direttrice EF del lato AO, e quindi la ragione di un tal lato alla perpendicolare OF, che cade sulla EF (160); e perciò se si faccia passare per la EF un piano perpendicolare alla AB, un tal piano sarà dato di sito, e la perpendicolare OF alla EF essendo anche perpendicolare ad un tal piano sarà pur data la ragione di AO alla perpendicolare OF dal punto O abbassata su di questo piano. Similmente dovrà esser data la ragione di AO alla perpendicolare OH, che dal punto O si abbassa su quel piano perpendicolare alla AC, il quale passa per la direttrice GH del lato AO nel triangolo AOC; e così pure è data l'altra ragione della AO alla OL, che dal punto O si abbassa perpendicolarmente a quel piano normale alla AD condottole per la direttrice KL del lato AO nel triangolo AOD. Quindi è anche data la ragione delle tre perpendicolari OF, OH, OL; e perciò il punto O sarà allogato in una retta di sito (164): ed il proposto problema si ridurrà ad inclinare dal dato punto A a questa retta di sito la AO, sicchè abbassata dal suo estremo O su quel piano che passa per la EF la perpendicolare OF, sia data la ragione di AO ad OF, cioè al precedente lemma problematico (*a*).

(a) La semplicità del metodo qui tenuto in risolvere il presente Problema, in paragone di quello usato dal Fermat, potrà facilmente rilevarsi dall' orditura dell' analisi geometrica, ch' egli vi stabilì per esso, e che or qui reco: *Sit factum* (ecco com' egli ragiona) *et qua usus est methodo Apollonius Gallus* (Vieta), *ut problema de tribus circulis ad problema de puncto et duobus circulis deduceret, eadem et simile praecedentibus fumosum hoc et nobile problema ad duodecimum, datis tribus sphoeris et puncto deducemus*. E questo problema duodecimo cui egli riduce il proposto, per mezzo del terzo lemma da esso stabilito, si riduce al

LEMMA IV.

167. *Le tre rette che congiungono i punti corrispondenti delle scambievoli intersezioni di tre cerchi, o concorrono in un medesimo punto, o pur sono parallele tra loro.*

Sieno EFG, GIH, HIE (*fig.* 49 e 50) i tre cerchi che s'intersegano ne' punti F, E; G, K; I, H; e congiunte le GK, EF, queste si taglino in *a*: dico che l'altra retta IH debba anche incontrarsi con quelle due in *a*.

Imperocchè si unisca la I*a*, e questa s'è possibile non passi per H, ma interseghi il cerchio GIH in S, e l'altro EFH in R, saranno uguali i rettangoli R*a*I, E*a*F delle parti delle corde RI, FE del cerchio HIE. Ma il rettangolo E*a*F è uguale all'altro G*a*K, essendo le FE, KG corde dello stesso cerchio GKE; e questo rettangolo G*a*K è finalmente uguale all'altro S*a*I, perchè GK ed IS sono corde del medesimo cerchio GKH. Dunque sarà il rettangolo R*a*I uguale all'altro S*a*I, e perciò *a*S uguale ad *a*R. Il che essendo impossibile, dovrà la HI passare per *a*.

Che se la GK suppongasi parallela alla HI (*fig.* 51), dovrà anche la FE esser parallela ad entrambe. Perchè se la FE incontrasse la GK in *a*, congiunta la *a*I, si dimostrerà come poc'anzi, che questa non possa intersegare i due cerchi GHI, HFE in due punti diversi, ma che debba passare per H. Adunque la HI non sa-

nono, il quale poi, per lo stesso lemma, lo fa dipendere dal terzo, e questo finalmente dal problema del Vieta di: *Descrivere un cerchio il qual passi per due punti, e tocchi un altro cerchio dato.*

rebbe parallela alla GK come si è supposto, che perciò la FE dovrà esser necessariamente parallela alla GK.

165. *Cor.* 1. È facile a rilevarsi dalla precedente dimostrazione anche quest' altra verità, cioè, che: *Se nella lin. a retta FE* (*fig.*49. e 50), *che unisce i punti d' intersezione F, ed E de' due cerchi FGE, HIE si prenda un punto a ad arbitrio, dal quale si tirino a que' due cerchi le corde GK, IH; per gli estremi G, K, I, H di queste vi dovrà passare un cerchio.*

Imperocchè è chiaro che i rettangoli G*a*K, I*a*H sono uguali tra loro, essendo ciascun di essi uguale al rettangolo E*a*F.

166 *Cor.* 2. Inoltre si rileva anche chiaramente, che se la GK (*fig.*51) si bissechi in Y, dal qual punto si elevi ad essa la perpendicolare; questa dovrà passare pe' centri B e C de' due cerchi GFK, GIH che intersegansi. E per la stessa ragione se la HI si divida per metà in Z, donde le si elevi la perpendicolare, questa dovrà passare pe' centri C, D de' cerchi GHK, HFE, che anche s' intersegano. Laonde se le GK, HI si suppongano parallele, le CB, CD, che sono le perpendicolari condotte ad esse dallo stesso punto C, dovranno formare una sola retta; e perciò: *Se risultano parallele le linee che uniscono le intersezioni rispettive di tre cerchi; i loro centri giaceranno in una medesima linea retta: ed al contrario.*

167. *Scol.* Il Sig. Carnot ha anch'egli dimostrata la sola prima parte della prop. prec. ricavandola dall' intersezione delle sfere che hanno per cerchi generatori i tre dati (*Geomet. de pos. n.* 306); una tal sua dimostrazione non è però certamente modellata sul vero sistema geometrico: ed egli stesso di ciò convinto si scusa dicendo di aver preferita tal maniera di dimostrare ad un' altra più diretta, e fatta senza ricorrere alle sfere;

perchè quella gli era sembrata più semplice. Ma io non so se chi leggerà la dimostrazione del Sig. Carnot la potrà dire più semplice di quella che quì si è recata. Che anzi è dal teorema da noi dimostrato che possonsene ricavare facilmente i seguenti altri due per le sfere che s' intersegano.

Teor. I.

168. *Se tre sfere s' intersegano scambievolmente, i piani de' cerchi in cui s' incontrano due a due, dovranno concorrere in una medesima retta perpendicolare al piano che passa pe' centri di esse sfere, o pure essere parallele tra loro.*

Imperocchè sieno GKH, HFE, GKE (*fig.* 49) i tre cerchi generatori delle sfere proposte, segnati nel piano che passa pe' centri C, D, B di queste; e congiunti i punti corrispondenti delle intersezioni di tali cerchi, queste congiungenti concorrano primieramente in *a* (164). È chiaro che nel rivolgersi che fanno i cerchi GIH, HIE intorno a' loro diametri coincidenti colla CD, ch' è la congiungente i loro centri, per generar due delle proposte sfere, la retta IZ, ch' è perpendicolare alla CD descriverà quel cerchio, ch' è l' intersezione di tali sfere, ed il cui piano sarà perpendicolare al piano BCD. Similmente rivolgendosi i cerchi HIE, EKG intorno a que' loro diametri che coincidono colla congiungente BD de' loro centri; le sfere che sono da essi generate s' intersegheranno in un cerchio, che avrà per diametro la FE perpendicolare alla BD, ed il cui piano sarà perpendicolare al piano BCD. Ed in simil guisa si dimostrerebbe, che la sfera generata dal cerchio EKG, e quell' altra che vien descritta

dal cerchio GKH s' interseghino nel cerchio descritto dalla GY, il cui piano è perpendicolare al piano CBD. Or i diametri GK, HI, FE di questi tre cerchi s' intersegano in *a*, ed i loro piani sono perpendicolari allo stesso piano BCD; dunque è chiaro ch' essi cerchi si dovranno intersegare in una retta perpendicolare in *a* a quel piano BCD.

Che se le rette GK, HI, FE (*fig.* 51) fossero risultate parallele tra loro; in un tal caso i cerchi d' intersezione delle proposte sfere, avendo per loro diametri rispettivi queste linee, ed i loro piani essendo normali allo stesso piano BCD, dovrebbero esser anche paralleli.

Teor. II.

169. *Tre superficie sferiche, che s' interseghino scambievolmente, non hanno che due soli punti di comune.*

Sieno come poc'anzi GKH, HFE, GKE (*fig.* 49) i cerchi generatori delle tre sfere proposte, segnati nel piano che passa pe' centri di esse, e congiungansi i punti corrispondenti delle intersezioni di questi cerchi colle GK, IH, EF: dovranno queste necessariamente concorrere in uno stesso punto *a* (164). Per lo che essendo uguali i rettangoli G*a*K, I*a*H, E*a*F, dovrà a' tre cerchi d' intersezione corrisponderle per lo punto *a* comune a'loro diametri una stessa semiordinata, la quale sarà perpendicolare al piano BCD (168): quindi le loro semicirconferenze che sono al di sopra del piano BCD, dovendo passare tutte tre per l' estremo di questa semiordinata, verranno ad avere un punto di comune; ed un altro ne avranno quelle che restano dalla parte di sotto dello stesso piano BCD: ond' è che que-

ste tre circonferenze s' intersegheranno scambievolmente in due punti ; e perciò anche in questi due punti s' intersegheranno scambievolmente le superficie delle tre sfere proposte.

LEMMA V. PROBLEMATICO

170. *In una piramide triangolare dati i suoi sei lati; determinare l' altezza del vertice di ciascun suo angolo sul piano opposto , e 'l punto ove questo è incontrato da quella perpendicolare .*

Il triangolo BCD (*fig.* 49) rappresenti la base della proposta piramide , ed O il vertice di essa ; si vuol determinare il punto a ove la perpendicolare Oa abbassata da O sul piano opposto BCD incontra un tal piano , e di più la grandezza di tal perpendicolare .

Composizione geometrica.

Co' centri B , C , D e co' raggi α , β , γ uguali respettivamente a' tre rimanenti lati della piramide proposta si descrivano i tre cerchi KEG, HKG , HIE , i quali s' interseghino scambievolmente ne' punti E , F ; I , H ; K , G , e si uniscano le EF , GK , IH , queste si dovranno intersegare scambievolmente nel punto a (164) , che sarà quello ove la perpendicolare cercata incontra il piano BCD , e tal perpendicolare sarà quanto le media proporzionale aO ritrovata tra Ga ed aK.

Imperocchè congiunta la Ba sarà $BO^2 = Oa^2 + aB^2 = GaK + aY^2 + BY^2 = KY^2 + BY^2 = BK^2$, e quindi BO = BK = α : e così dimostrando che CO sia quanto β , e DO quanto γ , sarà perciò il punto O il vertice della piramide proposta , ed Oa la sua altezza.

ALITER

Analisi geometrica.

171. Poichè (*fig.*52) $CO^2 - OB^2 := Ca^2 - aB^2$, e quindi a $CE^2 - FB^2$, sarà data la differenza $CE^2 - EB^2$, che dicasi M^2, e quindi sarà dato il punto E nella BC. Imperocchè essendo $CE^2 - EB^2 = M^2$, sarà $CB \times (CE - EB) = M^2$, e perciò

$$CB : M :: M : CE - EB$$

Laonde sarà data la $CE - EB$, e perciò il punto E.

Adunque si saprà la locale Ea del punto a : e determinando similmente l'altra locale Fa dello stesso, si farà noto il punto a, per conseguenza la aE; e finalmente l'altezza aO della piramide si otterrà dall' ipotenusa BO data, e dal dato cateto Ba.

172. *Scol.* Rilevandosi dal Teor. 2. dello Scol. della prop. prec. che quel punto che dista da' tre dati, da una parte del piano di questi, per intervalli dati, non sia che uno, si comprende chiaramente che il presente lemma problematico resti completamente risoluto.

PROP. LXIII. PROBL.

173. *Descrivere una sfera di un dato raggio la quale tocchi tre sfere date di grandezze e di sito.*

Analisi Geometrica.

I centri B, C, D, (*fig.* 53) delle sfere date si congiungano tra loro, e col centro O della sfera da descriversi; rappresenterà il punto O il vertice di una piramide triangolare della quale ne sono dati tutti i lati: che perciò pel lemma precedente si potrà determinare il sito di un tal punto.

174. *Scol.* Oltre a quella famiglia di Problemi compresi nell' enunciazione generale recata dal Pappo nella Prefazione al lib. VII. delle Collezioni Matematiche, e da noi riportata nella nota al n. 157; l' intero genere de' Problemi *delle Tazioni* risoluti da Apollonio Pergeo ne' due libri di questo nome, che formavan parte del *luogo di risoluzione* delle Greche Scuole, veniva completato da un' altra classe di Problemi deficiente nell' ipotesi dalla predetta; ma più abbondante nella determinazione del quesito, la qual classe vien dal Pappo stesso compresa in quest' altra generale enunciazione: *Ex punctis, et rectis lineis, et circulis quibuscumque duobus datis, circulum describere magnitudine datum, qui per datum punctum, vel data puncta transeat; contingat autem unamquamque datarum linearum*. E tra tutt' i problemi compresi in questa enunciazione, ch' egli enumera, e che sono sei, il principale sarebbe quello di: *Descrivere un cerchio dato di grandezza, che tocchi due cerchi dati*, del qual problema, come ognuno facilmente si accorgerà, è intuitiva la soluzione. Or ad imitazione di questa seconda classe di problemi delle Tazioni, si potrebbe completare anche il genere di quelli de' contatti sferici coll' altra de' problemi compresi nella seguente enunciazione generale: *Dati tre qualunque tra punti, piani, e sfere; descrivere una sfera di grandezza data, la quale passi pe' punti dati, e tocchi i piani, e le sfere date*, della qual classe il principal problema è quello che abbiamo poc' anzi risoluto (173). Ed i giovani potranno per loro esercizio cercar la soluzione de' rimanenti problemi di queste due altre enunciate classi, avvalendosi de' principj che si sono da noi stabiliti.

CAP. X.

DELLE INTERSEZIONI DELLE SUPERFICIE CURVE.

175. Allorchè due superficie curve s' intersegano nello spazio; è egli chiaro, che dati i determinanti del loro sito, e della loro forma dovranno anch' essere dati quelli della forma e posizione della linea nella quale essi s' intersegano : ed è precisamente della ricerca del metodo, onde da' que' primi passare a questi secondi, che ci occuperemo nel presente Capitolo. Or siccome una tal linea d' intersezione deve ritrovarsi nell' una e nell' altra delle due superficie curve, di cui rappresenta la comune sezione ; perciò deve essa generalmente partecipare della curvatura di entrambe, ed esser quindi, come suol dirsi, una *curva a doppia curvatùra*, cioè tale, che per essa non può in alcun modo farvisi passare un piano. Una tal linea d' intersezione può intanto, in alcuni casi, essere anche una linea a semplice curvatura, cioè ch' esista in un piano, come l' è, per esempio, quella che risulta dall' intersezione di due superficie sferiche, in altri casi più particolari anche una retta, come sarebbe l' intersezione di due superficie coniche, le quali avessero il vertice comune; e finalmente in altri casi può tal intersezione divenire anche un punto, se, cioè, le due superficie intersegantisi diventassero tangenti l' una dell' altra, e fossero di tal natura, o talmente disposte da doversi toccare in un punto solo. Ma eccone delle cose finora dette in astratto un più preciso dettaglio, e delle teorie confacenti al nostro argomento.

176. *Def.* XVII. *Construire l' intersezione di due superficie curve date* è lo stesso, che rappresentarne, per mezzo de' determinanti del sito e della forma di tali superficie, le rispettive projezioni di essa intersezione su que' piani stessi, ove eran dati que' determinanti.

177. *Scol.* Una tal ricerca sebbene esiga, secondo la diversa natura delle superficie che s' intersegano, e talvolta anche secondo la diversa posizione ch' esse possono avere, considerazioni speciali; pur tuttavia non sarà fuor di proposito di qui appresso adombrare generalmeute il metodo conducente ad essa; il qual poi resterà rischiarato dalla risoluzione di que' Problemi che risolveremo in appresso.

PROP. LXIV. PROBL. GENERALE.

178. ***Abbozzare il metodo generale onde construire l' intersezione di due superficie curve date di sito e di forma, le quali s' intersegano.***

Concepiscansi esse superficie segate da una serie di piani, i quali serbino tutti nello spazio una stessa posizione determinata, cioè sieno tutti paralleli ad un piano di sito, o passino tutti per una retta data di posizione. Scelgansi però tali piani seganti in modo, che le intersezioni di essi con ciascuna delle proposte superficie intersegantisi sieno facili a conoscersi, ed a rappresentarsi, per mezzo delle loro projezioni. Ciò posto per ognuno di questi piani seganti si determinino i punti ne' quali s' intersegano le projezioni delle linee curve da esso prodotte nelle superficie curve proposte, e che saranno precisamente le projezioni di que' punti che in tal piano segante si trovano esser comuni a tali superficie; la curva o que' rami di curva, che passerà su ciascun piano di projezione, per tutti

que' punti, che col precedente metodo si saranno esibiti su di esso, dinoterà la projezione corrispondente dell' intersezione da construirsi.

179. *Scol.* Il metodo esposto nel precedente problema, sebbene sia generale, ed applicabile ad ogni quistione ove propongasi a construire l' intersezione di due superficie curve, ha però bisogno di molta prudenza di chi lo adopera, per essere vantaggiosamente applicato: poichè esigendosi per esso, come si è veduto, a fin di determinare que' punti dell' intersezione di due superficie curve che ritrovansi in uno stesso piano segante, di construire le due linee da questo in quelle rispettivamente segnate; sarà tal construzione tanto più semplice ed elegante, quanto più facili ad esibirsi sono le projezioni di queste linee, le quali in molti casi, scegliendosi convenevolmente i piani seganti, non sono che rette e cerchi, e quindi capaci ad essere esibite con un moto facile e continuo. Bisogna dunque prima d' imprendere la soluzione di un problema di questo genere, che si mediti bene sulla genesi delle superficie delle quali se ne vuol determinare l' intersezione, e sulla scelta de' piani seganti; affinchè il metodo proposto per construire l' intersezione delle superficie curve, il quale, per altro, è di sua natura lungo, e penoso, riesca in pratica della maggior facilità ed eleganza possibile. E talvolta, per ottener elegantemente la soluzione di uno di questi problemi, bisognerà rinunziare al sistema de' piani seganti, ed impiegare superficie curve le cui intersezioni colle proposte sieno più facili a determinarsi che quelle de' piani; del che se ne vedrà un esempio nella Prop. LXX. *cas.* 1.

PROP. LXV. PROBL.

180. *Construire l'intersezione di due superficie cilindriche date di sito.*

Le due curve *xgv*, *zfu* (*fig.* 54) rappresentino le tracce di esse superficie su di uno stesso piano di projezione, e le *cd*, C'*d*' sieno le projezioni di quella retta alla quale è costantemente parallela la generatrice della superficie cilindrica che ha per traccia *xgv*; *ab*, A'*b*' quelle dell' altra retta cui è costantemente parallela la generatrice dell' altra superficie cilindrica proposta. Si tiri per questa retta un piano parallelo alla prima (89), e di un tal piano ne sia *ae* la traccia sul piano di projezione ove esistono le curve *xgv*, *zfu*; ed a questa *ae* si tirino, nello stesso piano di projezione, quante si vogliano parallele *fk*, che interseghino le due tracce *xgv*, *zfu*, per ciascuna delle quali si concepisca condotto un piano parallelo a quello che passava per *ae*. Egli è chiaro, che ognun di tali piani intersegherà le due superficie cilindriche proposte in que' loro lati, che passano pe' rispettivi punti *f*, *h*, *g*, *k* ne' quali le due curve *xgv*, *zfu* sono segate dalla corrispondente *fg*: ed è anche chiaro, che si apparterranno all' intersezione da construirsi que' punti ne' quali questi lati s' intersegano, ove ciò avvenga.

Per esibir questi tali punti d' incontro, si tirino pe' punti *f*, *h* le rette *fl*, *hm* parallele alla *ab*, saranno tali parallele le projezioni corrispondenti, sul piano della traccia *zfu*, di que' lati della superficie cilindrica di questa traccia, che la incontrano ne' punti *f* ed *h*: e projettando questi punti in F', H' sull' altro piano di projezione, le parallele F'*l*', H'*m*' condotte per F' ed H' alla A'*b*' dinoteranno le projezioni corrispondenti de' suddetti lati di tal superficie cilindrica. Similmente

determinando sul piano di projezione ove esiste la xgv le projezioni gi, kn di quegli altri lati della superficie cilindrica di questa traccia, che passano per gli punti g, k, e poi le corrispondenti projezioni $G'i'$, $K'n'$ di essi sull' altro piano di projezione: i punti p, q, r, s ove s' intersegano su di un piano stesso di projezione, quello delle curve xgv, zfu, le projezioni corrispondenti de' lati dell' una, e dell' altra superficie cilindrica, dinoteranno su questo piano le projezioni de' punti comuni a que' lati di esse superficie, e quindi ad esse, nel piano condotto per la retta fk. E similmente gli altri punti p', q', r', s' ove s' interseglieranno, sull' altro piano di projezione, le corrispondenti projezioni de' suddetti lati, saranno le altre projezioni de' punti stessi.

Laonde se ciò si continui a fare, la curva che si condurrà per tutti i punti p, q, r, s così determinati, sarà, nel piano di essi, la projezione dell' intersezione delle due superficie cilindriche date, e l' altra curva che passa per tutti gli altri punti p', q', r', s' dinoterà l' altra projezione dell' intersezione stessa.

181. *Cor.* Se la direttrice del lato di una delle due superficie cilindriche fosse una retta, colla stessa construzione del precedente problema, si sarebbe construita l' intersezione di una data superficie cilindrica, e di un piano dato di posizione. Che se in questo caso si supponga che l' un de' piani di projezione sia perpendicolare alla generatrice della superficie cilindrica, e l' altro al piano dato di sito che intersega questa; allora l' intersezione da construirsi avrebbe per una delle sue projezioni la traccia data della superficie cilindrica, e per l' altra quella parte della traccia del piano dato, che nell' altro piano di projezione resta tra quelle tangenti la traccia della superficie cilindrica, che sono perpendicolari alla comune sezione de' piani di projezione.

E volendo esibir la curva d' intersezione tal quale essa è nel piano segante, cioè la sua vera forma, ciò si otterrà facilmente per mezzo della Prop. XXXI.

182. *Scol.* Siccome i limiti del sistema di piani seganti le due superficie cilindriche proposte debbono esser que' piani condotti ad esse, i quali sono paralleli al piano di sito che ha per traccia la *ae*, e che sono gli ultimi ad intersegare le due superficie cilindriche, così si vede che i limiti del sistema di rette parallele alla *ae*, che debbono condursi nel piano di projezione delle curve *zfu*, *xgv*, per effettuare la soluzione del precedente problema, sieno contenuti tra le ultime rette parallele alla *ae*, che intersegano le curve suddette: laonde bisognerà condurre queste tali rette prima di cominciar la construzione di un tal Problema. Ed è pur anche a proposito l' avvertire, che la ricerca di tali limiti in questi problemi delle intersezioni è essenzialissima, prima d' incominciar la construzione di talun di essi, per non essere obbligato ad operazioni superflue, e non conducenti alla soluzione cercata. Intanto ciò che si è quì solamente accennato su questo argomento potrà bastare per gli altri casi; che perciò noi tralasceremo in appresso una tal considerazione, lasciandola ai giovani.

Inoltre conviene avvertire, che la curva che passa pe' punti *p*, *q*, *r*, *s*, e similmente l' altra condotta per gli altri punti *p'*, *q'*, *r'*, *s'* potrà constare di un ramo solo, o pur di due, o anche più distinti tra loro; il che dipende dalla diversa posizione e natura delle superficie che s' intersegano.

PROP. LXVI. PROBL.

183. *Construire l'intersezione di due superficie coniche date di sito.*

Sieno *a*, *a'*, (*fig.* 55) le projezioni del vertice di una delle due superficie coniche, ed *xgv* la sua traccia su di uno de' piani di projezione: sieno poi *b*, *b'* le projezioni del vertice dell'altra superficie conica, e *zfu* dinoti la traccia di essa sul piano stesso della precedente.

Si prenda per direttrice de' piani seganti quella retta che unisce i vertici delle due superficie coniche, e che ha per sue projezioni le *ab*, *a'b'*: che perciò se si determini il punto *i* ove tal retta incontra il piano delle tracce *xgv*, *zfu* (50); la traccia su di questo di un qualunque di que' piani seganti potrà dinotarsi con una retta qualunque *if* tirata per lo punto *i* in modo che seghi le due tracce delle superficie coniche proposte; ed i punti *f*, *h*, *g*, *k* ove queste sono segate dalla *if* saranno quelli per dove passano que' lati di esse, che esistono nel piano segante corrispondente, ed i quali avranno per loro projezioni sul piano della *if*, le *ga*, *ka*; *fb*, *hb*. Laonde i punti *p*, *q*, *r*, *s* ove le precedenti projezioni di que' lati s'intersegheranno, saranno le projezioni corrispondenti di quelli altri ne' quali s'incontrano i suddetti lati, o sia de' punti comuni alle due superficie coniche proposte, nel piano da cui si sono fatte segare. Se dunque si continui la stessa construzione, si verrà a determinare una serie di punti *p*, *q*, *r*, *s*, pe' quali facendosi passare una curva, sarà questa la projezione dell'intersezione da construirsi, nel piano della *if*.

Per aver poi l'altra di tali projezioni, è chiaro,

che bisognerà projettare, per ogni retta *if*, che si è tirata, i punti *f*, *h*, *g*, *k*, sull' altro piano di projezione, in F', H', G', K': congiunte le F'*b*', H'*b*'; G'*a*', K'*a*' saranno queste le altre projezioni corrispondenti di que' lati delle superficie coniche date, che ritrovansi nel piano segante condotto per *if*; ed i punti *p*', *q*', *r*', *s*' ove tali projezioni s' intersegano, saranno le projezioni, su quest' altro piano di projezione, dell' intersezione di que' tali lati, e quindi de' punti che in tal piano si trovano esser comuni alle due superficie coniche date. Laonde la curva che passerà per tutti questi punti così determinati sarà l' altra projezione cercata della curva d' intersezione da construirsi.

PROP. LXVII. PROBL.

185. *Construire l' intersezione di una superficie conica data di sito, con una superficie cilindrica similmente data.*

Prendasi l' un de' piani di projezione perpendicolare alla generatrice della superficie cilindrica, e sia *acb* (*fig.* 56) la traccia di questa superficie su tal piano, *degf* quella della superficie conica, ed *h*, *h*' le projezioni del vertice di questa.

Si concepisca passare per l' altezza di tal vertice sul piano delle tracce *acb*, *degf* un sistema di piani seganti, la traccia di un de' quali sul piano stesso di projezione sia la retta *hcg*; il punto *c* ove tal retta intersega la traccia *acb* della superficie cilindrica, sarà la projezione di quel lato della superficie suddetta, che si trova in tal piano segante, ed incontra la traccia *acb* in *c*: ed abbassando da *c* sulla LM la perpendicolare indefinita *c*C'*c*', sarà C'*c*' la corrispondente projezione di tal lato sull' altro de' piani di projezione. Inol-

tre si projetti il punto g, ove la stessa retta hcg intersega la traccia della superficie conica, in G' sull'altro de' piani di projezione, e congiungasi la G'h', saranno le hg, h'G' le corrispondenti projezioni del lato della superficie conica, ch' è nello stesso piano segante, ed il quale incontra la traccia di questa in g. Laonde il punto p' ove intersegansi le C'c', G'h' sarà la projezione del punto d' intersezione di que' lati delle due superficie curve proposte, i quali contengonsi nello stesso piano segante condotto per la hg. E determinando similmente moltissimi altri di questi punti p'; la curva condotta per essi disegnerà una delle projezioni dell' intersezione cercata, e quindi questa si sarà construita, mentre l' altra projezione di essa, a cagione della maniera come si è stabilito il piano di projezione delle tracce acb, $degf$, cade nella stessa traccia acb della superficie cilindrica; e non resta al più che definirne il corso: il che si ottiene col fissare i limiti del sistema de' piani seganti (182).

187. *Cor.* Se la direttrice della retta che genera la superficie cilindrica, cioè la sua traccia acb, diventasse anche una retta, si sarebbe, per mezzo del precedente problema, construita l'intersezione di una superficie conica data di sito con un piano di sito perpendicolare a quello di projezione ove si supponeva data la traccia della superficie conica; e la vera forma di una tal curva si potrà esibire per mezzo della Prop. XXXI.

LEMMA

188. *Se da' punti di una curva, ch' è in un piano, s' intendano condotte delle rette tutte uguali fra loro, e prossimissime l' una all' altra; la curva che passerà per tutti questi altri estremi di tali rette sarà identica alla proposta.*

Sia ACB (*fig.* 57) la curva proposta, e da' suoi punti C, D, E, F, ec. prossimissimi l'uno all'altro siensi condotte le Cc, D*d*, E*e*, F*f*, ec. tutte fra loro uguali, e parallele. E poichè C*c* è uguale e parallela a D*d*; congiunte le CD, *cd*, queste saranno ancora uguali e parallele. Similmente si dimostrerà che sia DE uguale e parallela a *de*, EF uguale a parallela ad *ef*, e così in seguito: che perciò gli angoli CDE, DEF, ec. saranno rispettivamente uguali agli angoli corrispondenti *cde*, *def*, ec.; e quindi il sistema delle CD, DE, EF, ec. si potrebbe far combaciare col sistema delle *cd*, *de*, *ef*, ec., cioè il perimetro d'infiniti lati inscritto nella curva ACB, per mezzo della construzione indicata, si potrebbe far combaciare col corrispondente nell'altra curva *acb*, che passa per tutti i punti *c*, *d*, *e*, *f* che si sono assegnati. Dunque tali perimetri saranno identici; e perciò anche tali saranno le curve in cui essi si terminano.

189. *Cor.* Quindi si vede in qual modo si possa per un punto dato nel piano di una data curva descriverne un'altra identica alla proposta: ed è anche chiaro, ch'esse debbano essere tra loro parallele; come pure che qualunque altro sistema di parallele vi si conduca da' punti dell'una all'altra, queste debbano tra loro pareggiarsi.

PROP. LXVIII. PROBL.

190. *Construire l'intersezione di una superficie cilindrica data di sito con un' altra di rivoluzione intorno ad un asse verticale, anche data di forma e di sito.*

Sieno *gh*, *g'h'* (*fig.*58) le projezioni di quella retta cui è parallela la generatrice della data superficie cilindrica, ed *abc* dinoti la traccia di essa su quello

de' piani di projezione cui è perpendicolare in d l'asse della data superficie di rivoluzione. Sia inoltre $e'd'f'$ la projezione della generatrice di quest' altra superficie su di un piano perpendicolare al primo, e la projezione del suo asse su di questo stesso piano sia espressa dalla D'd' perpendicolare sulla LM, ...

Ciò posto, si tiri in questa curva $e'd'f'$ qualunque ordinata $m'l'$ all' asse D'd', per la quale si supponga condotto un piano orizzontale: un tal piano segnerà nella superficie di rivoluzione un cerchio del raggio $m'n'$, che avrà per projezione orizzontale il cerchio psr descritto col centro d, e col raggio $m'n'$. Inoltre col cateto n'D' e coll' angolo opposto ad esso uguale a quello in cui inclinasi al piano orizzontale la generatrice della superficie cilindrica (80) si descriva il triangolo n'D'X', e tagliata la bg uguale alla D'X', si descriva per g la curva gpq identica all' altra abc (188); sarà questa la projezione della comune sezione del piano orizzontale condotto per la $m'l'$ colla superficie cilindrica; e perciò i punti p, q, ov' essa interseca il cerchio $p\,s\,r$, saranno le corrispondenti projezioni orizzontali di que' punti comuni alle due intersezioni prodotte da quel piano segante nelle superficie curve proposte, cioè di que' punti che sono ad esse comuni in tal piano. E projettandosi questi punti p, q in p', q' sulla $m'l'$ nell' altro piano di projezione, si avranno così le corrispondenti projezioni verticali de' punti suddetti delle superficie proposte. Laonde, continuandosi la stessa costruzione, si verrà in tal modo ad assegnare una serie di punti p, q ec. sul piano orizzontale, ed un' altra corrispondente p', q', ec. sul verticale; e facendo passare una curva pe' primi di essi, ed un' altra pe' secondi saranno queste le respettive projezioni dell' intersezione cercata.

E sarà facile poi a rilevarsi che per mezzo di un simile sistema di piani seganti si potrà construire l'intersezione di una superficie di rivoluzione intorno ad un asse verticale con un piano di sito, il quale, per maggior facilità, si potrebbe prendere perpendicolare a quello di projezione verticale.

191. *Scol.* Se mai la superficie di rivoluzione data fosse stata quella di una sfera; in tal caso il piano orizzontale si sarebbe preso perpendicolare alla generatrice del cilindro, e così sarebbe restata facilitata grandemente la soluzione del presente problema; poichè la projezione orizzontale della comune sezione di ciascun piano segante colla superficie cilindrica sarebbe stata la stessa traccia di questa; e tal traccia avrebbe anche rappresentata la projezione orizzontale dell' intersezione da construirsi; per lo chè di questa projezione non sarebbe stato bisogno, che di fissarne solamente i limiti, la qual cosa facilmente si vede come debbasi eseguire. Laonde la presente ricerca si sarebbe ridotta a determinare la sola projezione verticale, che si sarebbe anche ottenuta in quel modo che sta indicato nel Problema precedente. E lo stesso, poco fa detto, avrà luogo, se mai essendo qualunque la superficie di rivoluzione, fosse però il suo asse parallelo alla generatrice della superficie cilindrica, nel qual caso il piano di projezione orizzontale, che si prende perpendicolare a questa, sarebbe anche perpendicolare a quello.

LEMMA

192. *Se nel piano di una curva si prenda un punto, dal quale si tirino a' punti di quella curva delle rette, ed in queste si ascindano, dal punto preso, delle parti proporzionali alle intere rette tirate; la curva che passerà per tutt' i punti in tal modo assegnati in esse, sarà simile alla proposta.*

Sia ACB (*fig.* 59) una curva; ed O il punto preso nel piano di essa, dal quale a' punti C, D, E, F ec. della curva sieno condotte le OC, OD, OE, OF ec. prossimissime l' una all' altra, e sieno *c*, *d*, *e*, *f*, ec. que' punti ove siffatte congiungenti restano divise in una stessa ragione data. E poichè CO : OD :: *c*O : O*d*, sarà il triangolo COD simile all' altro *c*O*d*; e così dimostrandosi degli altri, i due poligoni CDEFO, e *cdef*O saranno simili tra loro: che perciò il perimetro CDEF inscritto nella curva ACB si troverà esser simile all' altro corrispondente *cdef*, ch' è inscritto nell' altra curva *acb*, vale a dire che i lati corrispondenti dell' uno e dell' altro s' inclineranno in angoli uguali, e saranno di più proporzionali tra loro. Laonde anche le curve ACB, *acb* che sono i limiti di tali perimetri saranno tra loro simili.

193. *Cor.* Quindi si rileva in qual modo data una curva in un piano si possa per un punto dato nel piano stesso descrivere una curva simile ad essa, e con una data scala.

PROP. LXIX. PROBL.

194. *Construire l' intersezione di una superficie di rivoluzione data di sito e di forma intorno ad un asse verticale, con una superficie conica anche data di sito.*

Il punto *d* (*fig.* 60) sia la projezione orizzontale dell' asse della superficie di rivoluzione data, la retta D'*d* perpendicolare alla LM sia la corrispondente projezione verticale dello stesso; e la curva *g'd'f'* sia la projezione verticale della generatrice della proposta superficie di rivoluzione, allorchè nel suo rivolgimento intorno all' asse trovasi in un piano parallelo a quello di tal projezione; l' altra curva *abc* poi dinoti la traccia della data superficie conica, il cui vertice sia projettato in *c*, *c'*.

Si tiri una qualunque retta $l'm'$ parallela alla LM, e la quale sia la traccia verticale di un piano orizzontale che interseghi le due proposte superficie; sarà un cerchio la comune sezione di esso col solido di rivoluzione, ed avrà per raggio la semiordinata $n'm'$ nella curva $g'd'f$; e di esso se ne avrà la projezione orizzontale descrivendo col raggio suddetto e col centro d l'altro cerchio qps. Or lo stesso piano segante segnerà nella superficie conica una curva simile alla traccia abc di questa, e che avrà per projezione una curva identica ad essa, la quale si otterrà nel seguente modo, cioè: si conducaper lo punto c la cb, ed il punto b ove tal retta intersega la curva abc si projetti in B' sulla LM, e si unisca la B'c': saranno cb, c'B' le projezioni di quel lato del cono proposto che passa per b.

Ciò posto si divida la cb in k in modo che stia cb : ck :: B'c' : $c'k'$, e poi per k si descriva la curva pkq simile alla data abc (*lemma prec.*), saranno k, k' le projezioni corrispondenti di quel punto K della curva d'intersezione, ch'è nel piano orizzontale condotto per la $l'm'$, in dove è essa incontrata dal lato suddetto; e la curva pkq sarà la projezione di una tal intersezione. Finalmente è chiaro che i punti p, q ove la curva pkq intersega il cerchio pqs sieno le projezioni orizzontali corrispondenti di que' punti ne' quali s'intersegano nello spazio le comuni sezioni del piano segante condotto per la $l'm'$ colle due superficie date, o sia que' punti comuni a queste, i quali esistono in un tal piano; e p', q' ne dinoteranno le corrispondenti projezioni verticali. E determinando in simil modo una serie di punti come p, q sul piano orizzontale, ed altrettanti come p', q' sul verticale di projezione; la curva, o i rami di curva, che passerà pe' primi sarà la projezione orizzontale dell'intersezione che dovevasi construire, e l'al-

tra condotta pe' secondi ne sarà la corrispondente projezione verticale; che perciò una tale intersezione si sarà construita (176).

PROP. LXX. TEOR

195. *Construire l'intersezione di una superficie conica con quella di una sfera data.*

Sol. Cas. 1. Sieno primieramente concentriche queste due superficie, cioè che il vertice del cono sia centro della sfera, e sieno a, a' (*fig.* 61) le projezioni del centro comune, nqd la traccia orizzontale data della superficie conica, $a'm'$ il raggio della sfera, e 'l cerchio $l'f'g'm'$ la projezione verticale di essa. Ciò premesso, si concepisca passare per l'altezza orizzontale Aa' del centro comune delle due superficie date una serie di piani, saranno questi tutti verticali, e ciascuno di loro intersegherà la superficie conica in un sistema di rette, projettate tutte orizzontalmente nella traccia orizzontale del corrispondente piano segante, e la superficie della sfera in un suo cerchio massimo; ed i punti ne' quali s' incontreranno, per ciascun piano, quelle rette con questo cerchio si apparterranno all' intersezione da construirsi. Rappresenti la retta nad la traccia orizzontale di uno di questi piani, dovranno le generatrici nelle quali esso incontra la superficie conica passare per n, d, ed esser projettate sulla nd: e se si abbassino da questi punti sulla LM le perpendicolari nN', dD', congiunte le $N'a'$, $D'a'$, dinoteranno queste le respettive projezioni verticali di quelle stesse generatrici.

Per construire que' punti in dove queste rette incontrano la ciconferenza del cerchio segnato nella sfe-

ra dal piano stesso; si tiri per a la retta fag parallela alla LM, e poi s'intenda il proposto piano segante rivolgersi intorno alla Aa, finchè la nd coincida colla fg: è chiaro che in un tal moto non si varierà l'altezza orizzontale di essi punti d'intersezione; che i punti d, n descrivendo gli archi circolari dg, nf verranno ad applicarsi in g, f sulla fg; e che projettando questi in G', F, le G'a', Fa' dinotino le projezioni verticali delle generatrici della superficie conica, che passavano per d, n, nel nuovo sito che ha preso il piano segante che le contiene. Inoltre i punti g' f, ov'esse intersegheranno respettivamente la circonferenza $l'f g'm'$, ch'è la projezione verticale dell'intersezione di esso piano colla superficie della sfera, considerata anche nella posizione che ha presa in virtù del movimento del piano, saranno le projezioni verticali de' punti dell'intersezione dimandata, considerati anche nella nuova posizione di un tal piano. Il perchè le projezioni di essi punti nel vero loro sito dovranno esistere nelle parallele $g'h'$, $f'k'$ alla LM, tirate pe' punti g', f, ed esser perciò i punti h', k' ove queste rette incontrano respettivamente le Da', Na', che doveano pur contenerle; e se si projettino i punti h', k' sulla nd in h, k saranno questi le corrispondenti projezioni orizzontali degli stessi punti d'intersezione. E facendo passare una curva per tutt' i punti h', k' determinati nel modo stesso, ed un' altra per tutt' i punti h, k, saranno queste le respettive projezioni dell'intersezione proposta.

Cas. 2. Se non sono concentriche le due superficie, si prenda per direttrice de' piani seganti quella retta che unisce i due centri loro, e stabiliscasi il piano di projezione verticale parallelo a questa; saranno

pure linee rette le intersezioni di ciascun piano segante colla superficie conica, e cerchi massimi quelle che han luogo colla sfera, e tutta la soluzione si condurrà a fine come nel caso precedente.

LEMMA

196. *La projezione di un cerchio il cui piano è inclinato a quello su cui si projetta è un' ellisse, che ha per centro la projezione del centro del cerchio dato, ed in cui l' asse maggiore è quanto il diametro di questo, ed esso sta al minore, come il raggio al coseno dell'angolo d' inclinazione del cerchio al piano di projezione.*

Il piano $aA'a'$ (*fig.* 62) in cui esiste il semicerchio $b'Dc'$ sia perpendicolare al piano $a'A'M$, e quindi inclinisi a quello di projezione $MA'a$ nell' angolo dato $a'A'M$. Dagli estremi b', c' del diametro di quel semicerchio si abbassino sulla LM le perpendicolari $b'B'$, $c'C'$, saranno B', C' i limiti della curva $B'dC'$, che dinota nel piano $aA'M$ la projezione del cerchio proposto. Or da un qualunque punto d preso nella $b'c'$ si abbassi la $d'D'$ perpendicolare alla LM, e per essa si concepisca un piano perpendicolare all' altro $a'A'M$; è chiaro che questo dovrà intersegare il piano $aA'a'$ in una retta perpendicolare alla $A'a'$, e quindi segnare nel semicerchio $b'Dc'$ una sua semiordinata $d'D$, di cui un estremo d' sarà projettato in D', e l' altro D in d; che perciò la dD sarà quanto la sua projezione $D'd$. E poichè $d'D^2 = b'd'c' =$ $D'd^2$, sarà perciò $D'd^2 : B'D'C' :: b'd'c' : B'D'C' ::$ $(b'd' : B'D')\ (d'c' : D'C')$; e finalmente come il quadrato di $A'c'$ a quello di $A'C'$. Vale a dire che la curva $B'dC'$ è tale che in essa il quadrato di una qualunque semiordinata dD' sta al rettangolo $B'D'C'$ della

ascisse da entrambi i vertici, nella costante ragione del quadrato di A'c' a quello di A'C'. Adunque essa sarà un' ellisse in cui l'asse maggiore starà al minore, come A'c' : A'C', ossia come il raggio al coseno dell' angolo a'A'M. Ma allorchè la semiordinata O'e di quest' ellisse passa per la projezione O' del centro o' del cerchio dato, deve essa pareggiare il raggio o'E di quel cerchio, ed essere il semiasse maggiore di tal ellisse. Adunque ec.

PROP. LXXI. PROBL.

197. *Construire l' intersezione di due superficie di rivoluzione.*

Sol. Cas 1. Abbiano primieramente esse superficie i loro assi in un piano stesso; e suppongasi un di questi perpendicolare al piano orizzontale, e 'l piano verticale parallelo a quello che vien determinato dagli assi stessi.

Ciò posto, sia *a* (*fig.* 63) la projezione orizzontale dell' asse verticale, A'a' la projezione verticale dello stesso, c'd'e' la curva generatrice della superficie corrispondente, rappresentata sul piano verticale: e sia *ab* la projezione orizzontale dell' asse dell' altra, B'a' la verticale, ed f'd'h' la generatrice di una tal superficie, rappresentata anche sul piano verticale; è chiaro, che saranno *a*, *a'* le projezioni di quel punto nel quale i due assi si segano.

Concepiscasi adesso una superficie sferica avente per centro un tal punto, intersegare le due superficie date; sarà projezione verticale di essa il cerchio i'n'o'p' descritto col centro *a'* e col raggio della sfera; una tal superficie avendo l' asse di comune con ciascuna delle date intersegherà, come è chiaro, ognuna di

queste, in un cerchio, perpendicolare all' asse della stessa. Che perciò, la projezione verticale dell' intersezione della sfera colla prima di tali superficie sarà la retta $n'o'$ perpendicolare alla A'a', e l' orizzontale sarà il cerchio *nor* descritto col centro *a* e col diametro $n'o'$; e l' intersezione della stessa superficie sferica coll' altra delle date avrà parimente, per sua projezione verticale la retta $k'p'$ perpendicolare alla a'B'; e il punto r' nel quale s' intersegano le $n'o'$, $k'p'$ sarà, com' è chiaro, la projezione verticale di que' due punti ne' quali si tagliano le circonferenze de' due cerchi projettate verticalmente in $n'o'$, $k'p'$, cioè di due punti dell' intersezione da construirsi. Se dunque per tutti i punti r' così determinati si conduca una curva, sarà questa la projezione verticale di essa intersezione.

Projettando ciascun punto r' sulla circonferenza del cerchio corrispondente *nro* in *r*, *r*, saranno questi le projezioni orizzontali de' due punti d' incontro delle circonferenze de' cerchi suddetti, i quali si trovano sulla stessa sfera, e la curva tirata per tutti questi punti *r* similmente determinati sarà la projezione orizzontale dell' intersezione stessa.

Cas. 2. Esistano in secondo luogo gli assi delle due superficie date in piani diversi; e si continui tuttavia a supporre un di loro perpendicolare in *a* al piano orizzontale e 'l piano verticale parallelo ad entrambi; dovrà la projezione orizzontale dell' altro asse esser parallela alla LM (*fig.* 64): dinotino finalmente le A'a', B'b' le projezioni verticali rispettive di tali assi, e le curve $a'c'd'$, $b'd'g'$ segnate sul piano di projezione verticale sieno le generatrici corrispondenti delle due superficie di rivoluzione.

Ciò posto, si tirino nel piano verticale le rette F'f' ec. tutte perpendicolari alla B'b'; e per queste si sup-

pongano passar de' piani normali a quello: ciascun di questi piani segnerà nella superficie di rivoluzione che ha l' asse verticale, una curva della quale potrà determinarsene la projezione orizzontale *rct* col metodo stesso della prop. LXVIII. convenevolmente modificandolo; ed incontrerà l' altra superficie data, al cui asse è perpendicolare, in un cerchio, che avrà per sua projezione l' ellisse *rtg* (196): ed i punti *r*, *t* ne' quali queste due curve s' incontrano saranno le projezioni orizzontali di altrettanti punti dell' intersezione da construirsi, che esistono in uno stesso piano segante *fFf*. Se dunque per tutti questi punti *r*, *t* similmente determinati si faccia passare una curva, questa rappresenterà la projezione orizzontale di quell' intersezione.

Projettando i punti *r*, *t* in *r'*, *t'*, sulle rispettive tracce F*f* di quel piano segante, nel quale contengonsi i punti d' intersezione de' quali essi *r*, *t* ne sono le projezioni orizzontali; e poi tirando per tutti questi altri punti *r'*, *t'* in tal modo determinati una curva, si otterrà la projezione verticale dell' intersezione stessa.

CAP. XI.

DE' DETERMINANTI DELLE LINEE CURVE NELLO SPAZIO ; E DE' PRINCIPALI PROBLEMI CHE SI POSSONO RISOLVERE DI ESSE.

198. Si è già veduto nel n.81 quali fossero i determinanti della forma e posizione di una linea curva nello spazio, allorchè essa esisteva in un piano di sito; bisogna adesso estendere queste ricerche alle curve a doppia curvatura, ed indi risolvere sulle une e sulle altre alcuni principali problemi; il che eseguiremo nel presente Capitolo: ne' due seguenti poi, per un saggio delle teorie in questo generalmente esposte, ci occuperemo di alcune speciali considerazioni su due linee curve a doppia curvatura, cioè sulla *spirale cilindrica*, e sull' *epicicloide sferica*.

PROP. LXXII. TEOR.

199. *I determinanti del sito e della forma di una curva a doppia curvatura, sono le projezioni di essa su due piani ad angolo.*

Imperocchè essendo data una sola delle sue projezioni, è anche data quella superficie cilindrica, che ha per direttrice tal projezione, e per retta generatrice la perpendicolare al piano in cui quella esiste. Similmente è data la posizione dell' altra superficie cilindrica che ha per traccia l' altra projezione della curva proposta nello spazio, e per generatrice una retta per-

pendicolare al piano di quest' altra projezione : laonde tal linea curva non potrà essere che quella sola in cui queste due superficie cilindriche s' intersegano ; e perciò sarà data di sito (180).

E siccome di ogni punto della linea curva proposta nello spazio se ne hanno le due projezioni, si ha quindi l' altezza di esso su di uno de' piani di projezione (37), e per conseguenza il lato che corrisponde nella superficie cilindrica retta a tal piano. Laonde si potrà in questa superficie cilindrica segnare un tal punto ; e così facendo per ogni altro, si verrebbe a disegnare su di questa l' effettiva linea curva data per mezzo delle sue projezioni ; che perciò si sarà esibita la sua forma.

200. *Cor.* Da ciò si vede, che per determinanti della forma e posizione di una linea curva a doppia curvatura possansi anche benissimo prendere due superficie qualunque date di sito, in ciascuna delle quali quella si supponesse esistere ; perchè si è veduto nel Capitolo precedente, che da queste si poteva construire la loro intersezione, e quindi la curva in quistione.

201. *Scol.* Sebbene sieno i per anzi detti i determinanti generali del sito, e della forma di una qualunque linea curva a doppia curvatura nello spazio ; talune volte però essa può restare meglio determinata col darsi la legge del moto del punto generatore ; e questo metodo praticavasi dagli antichi geometri nel definire alcune di esse, come or ora passeremo a vedere.

202. *Def.* Se restando fisso il lato OI (fig. 66) del rettangolo AOIE, questo si rivolga intorno ad un tal lato ; e che nel tempo stesso si concepisca un punto da A scorrer equabilmente lungo l' altro lato AE in modo tale, che nel mentre quel rettangolo compie un' intera rivoluzione, e quindi genera un cilindro,

quel punto si trovi col suo moto sulla AE giunto in C: un tal punto con questi due moti combinati genererà sulla superficie del cilindro la linea curva ADC, che si dirà *spirale cilindrica*, *spirale Apolloniana*, e volgarmente *elica*.

203. Una tal linea curva è precisamente quella che ci vien rappresentata nelle arti dal rilievo di una vite, o dall' intersezione di una scala a lumaca col muro su cui poggia.

204. E se, supponendo indefinito il rettangolo OE, dopo che il punto mobile da A è giunto in C, continui a scorrere col moto stesso sulla CE, ed il rettangolo compia intorno alla OI un' altra rivoluzione, mentre quel punto da C passa in E, si verrà da esso a descrivere, come poc' anzi, un altro ramo di curva CHE continuo al precedente, ed identico ad esso: e così in seguito se ne potrebbero concepir descritti degli altri all' infinito.

205. Considerando come una sola curva l' intera ADCHE ec., la distanza AC, l' altra CE, o ogn' altra di que' punti ov' essa è incontrata dallo stesso lato AE del cilindro, si dirà *passo* della spirale cilindrica.

206. *Scol.* Una tal curva a doppia curvatura può anche intendersi generata dal raggio OA, il quale mentre rota intorno al punto O, per generare il cerchio, scorre col suo estremo O lungo la retta OI perpendicolare al piano di quel cerchio; e la spirale cilindrica sarebbe allora quella curva, che vien descritta dall' altro estremo A.

207. Or ad imitazione della spirale cilindrica può concepirsene descritta un' altra sulla superficie di un cono; nel seguente modo.

208. *Def.* Se il triangolo rettangolo DOA (*fig.* 67) si rivolga intorno al cateto fisso DO, e che nel tempo

stesso un punto scorra sulla sua ipotenusa da D verso A in modo che quando quel triangolo ha compita un'intera rivoluzione, quel punto si trovi giunto in A: un tal punto con tali due moti descriverà sulla superficie del cono che vien generata dal lato DA una curva DBA, che si dirà *spirale conica*.

209. E continuandosi il moto di rotazione dell'angolo ODA intorno alla DO, ed il moto stesso progressivo del punto lungo la DA indefinita, si verrà dopo un'altra rivoluzione intera di quell'angolo a descrivere un'altro ramo di spirale conica continuo col primo; e così in seguito.

210. *Def.* Inoltre se il quadrante circolare KOH (*fig.* 68.) si rivolga intorno al raggio fisso OH, finchè ritorni nel luogo stesso dove cominciò il suo moto, e che nel tempo stesso un punto scorra equabilmente da H in K lungo la circonferenza HNK; un tal punto col suo doppio moto descriverà sulla superficie dell'emisfero generato da quel quadrante la linea curva HIK, che si dirà *spirale sferica*.

PROP. LXXIII. PROBL.

211. *Date le projezioni di una curva, ch' è nello spazio, determinare s' essa sia a semplice, o pure a doppia curvatura.*

Sieno *abcd*, *a'b'c'd'* (*fig.* 69) le projezioni della curva proposta; e primieramente se una di esse, la *abcd* per esempio, fosse una retta, una tal curva nello spazio, non potrebbe essere che a semplice curvatura; poichè essa in tal caso dovrebbe risultare dall'intersezione della superficie cilindrica normale al piano della projezione *a'b'c'd'* che avrebbe questa curva per traccia, e del

piano verticale a quello della projezione $abcd$, e che ha per sua traccia su di questo la retta data: adunque una tal curva dovrà esistere in questo piano, e perciò essere a semplice curvatura. Suppongasi dunque, che ambe le projezioni $abcd$, $a'b'c'd'$ sieno linee curve. Si prendano in una di esse $abcd$, ad arbitrio, i quattro punti a, b, c, d, i quali si projettino sull'altra curva in a', b', c', d', saranno quelli e questi le corrispondenti projezioni di quattro punti nello spazio esistenti nella linea curva proposta. Or si determini il piano che passa per tre di questi punti ad arbitrio, e la retta che congiugne un di essi stessi col quarto: se tal retta incontrerà i piani delle projezioni $abcd$, $a'b'c'd'$ nelle tracce di un tal piano (e ciò è sufficiente sperimentarlo per una sola di queste tracce), sarà chiaro ch'essa esiste in questo, e quindi che quel quarto punto esisteva co' primi tre in un piano stesso, dal che ne segue che la curva proposta abbia tutti i suoi punti in un piano, e perciò che sia a semplice curvatura. Ma se poi ciò non avviene, la curva proposta sarà a doppia curvatura.

212. *Cor.* Si rileva da quello che in principio di questo Problema si è detto, che una curva a doppia curvatura non possa mai avere per una delle sue projezioni una retta.

PROP. LXXIV. PROBL.

213. *La tangente una linea curva nello spazio in un punto di essa ha per projezioni le tangenti le projezioni di tal curva in que' punti, che sono le projezioni del proposto.*

Imperocchè il piano projettante una tal tangente su ciascuno de' piani di projezione ove esistono le pro-

jezioni della curva proposta deve risultar tangente alla superficie cilindrica retta a tal piano, la quale ha per traccia la projezione di quella curva. Laonde la traccia di questo piano projettante dovrà risultare tangente alla traccia di quella superficie cilindrica, o sia alla corrispondente projezione della curva, in quel punto, ch' è, com' è chiaro, la projezione del contatto nella curva proposta.

214. *Cor.* Si vede da ciò chiaramente in qual modo si possa esibir la tangente in un punto di una curva data nello spazio.

215. *Scol.* E più generalmente se una curva nello spazio sia data per mezzo di due superficie curve date nelle quali esiste, o di cui è l' intersezione, si otterrà la tangente per un punto dato di essa, tirando per questo punto il piano tangente a ciascuna di quelle superficie curve, ch' erano i determinanti della curva proposta, e la tangente cercata sarebbe espressa dall' intersezione di que' due piani tangenti. La qual cosa è facilissima a comprendersi.

E da questo principio si potrà talvolta trarre profitto, per condurre geometricamente la tangente alla projezione di una curva nello spazio, la quale risulti dall' intersegarsi due superficie curve la genesi delle quali sia facile, e facile anche il condurle un piano tangente.

CAP. XII.

RICERCHE GEOMETRICHE SULLA SPIRALE CILINDRICA.

216. Per dare qualche esempio della maniera di risolvere i problemi che possonsi proporre sulle linee curve a doppia curvatura, partendo semplicemente dalla legge del moto del punto che le genera, abbiamo prescelta la spirale cilindrica, ch' è la curva a doppia curvatura più conosciuta presso gli antichi, i quali la impiegarono utilmente nel rettificar la circonferenza del cerchio come si rileva dal Lib. IV. delle Collezioni Matematiche di Pappo Alessandrino, e che in altri importanti e difficili problemi può talvolta con gran vantaggio impiegarsi, come si vedrà in appresso; ed anche perchè essa al presente è di un grandissimo uso nelle arti di construzione, ed in quelle del disegno. Nel seguente Capitolo intraprenderemo le stesse ricerche per un' altra curva a doppia curvatura immaginata da' moderni, e chiamata da essi *epicicloide sferica*.

PROP. LXXV. TEOR.

217. *Nella spirale cilindrica, ogn' arco del cerchio base del cilindro sta a quella parte del lato di questo che dall' estremo dell' arco va fino alla spirale, come la circonferenza di quel cerchio al passo della spirale*, cioè sta l' arco AM : MK, come la circonferenza AFM : AC (*fig.* 66).

Imperocchè nel descriversi la spirale cilindrica l' arco circolare AM, e la parte corrispondente MK del lato del cilindro vengono ad essere contemporaneamente descritte, che perciò esse debbono esser proporzionali alle velocità con cui si descrivono. Or queste velocità sono precisamente le stesse con cui contemporaneamente descrivonsi la circonferenza AFM, e il passo AC della spirale, giacchè il moto di rotazione del raggio OA intorno al punto O, è quello progressivo del punto O lungo la OI si suppongono equabili; che perciò tali velocità debbono essere come quella circonferenza alla AC. Adunque in questa ragione starà pure l' arco circolare AM alla parte corrispondente MK del lato del cilindro su cui è descritta la spirale.

218. *Cor.* 1. Quindi gli archi circolari AM, AM' saranno tra loro come le MK, M'K'.

219. *Cor.* 2. E se la spirale ADC sia segnata sul cilindro quadrato FC, starà ogn' arco AM alla corrispondente parte MK del lato del cilindro, come la circonferenza di un cerchio al suo diametro.

220. *Scol.* Ciò posto la retta PX (*fig.* 70, e 66) si ponga uguale alla circonferenza del cerchio FMA, e l' altra XY perpendicolare ad essa nel suo estremo X sia quanto il passo AC della spirale cilindrica ADC, congiunta la PY, se prendansi nella PX le PQ, PQ' ec. uguali agli archi AM, AM', ec., le perpendicolari elevate da questi punti alla PX e prolungate sino alla PY dovranno essere quanto le MK, M'K' ec. Imperocchè pe' triangoli simili PQN, PQ'N', PXY sta PQ : QN :: PQ', Q'N' :: PX : XY, cioè come la circonferenza del cerchio FMA al passo AC della spirale cilindrica, o sia come AM : MK, o come AM' : M'K': che perciò essendosi supposte le PQ, PQ' uguali rispettivamente alle AM, AM'; dovranno le QN, Q'N' esser quanto

le MK, MK'. E sarà facile, inoltre, il rilevare, che la PY sia quanto la lunghezza dell' intera spirale cilindrica ADC, e che le PN, PN' sieno rispettivamente uguali alle AK, AK': dal che si rileva che la rettificazione indefinita della spirale cilindrica dipenda dalla rettificazione indefinita della circonferenza del cerchio.

PROP. LXXVI. TEOR.

221. *La spirale cilindrica cotinuata intersega tutti i lati del cilindro su cui è segnata ad una distanza, ch' è sempre quanto il passo suo.*

Sia ADCHE (*fig.* 66) una spirale cilindrica continuata, il cui passo sia AC, ed un qualunque lato ST del cilindro FMAEG sul quale essa è descritta la intersegbi ne' punti *a*, *c*, dovrà la *ac* essere quanto il passo AC.

Imperocchè s' intenda per lo punto *a* passare un piano parallelo alla base del cilindro, che segnerà in questo il cerchio *fam* identico all' altro FMA. Or se il principio del moto del punto che descrive la spirale cilindrica proposta si supponga essere il punto *a*, e che la legge del moto di questo sia la stessa di quella del punto A, dovrà dal punto *a* percorrersi lungo il lato ST, e nel tempo che si descriverebbe la spirale *a*DC*c* identica all' altra ADC, la *ac* che sia quanto la AC. Adunque ec.

PROP. LXXVII. TEOR.

222. *La spirale cilindrica incontra tutt' i lati del cilindro sotto l' angolo stesso, la cui tangente è quanto il rapporto della circonferenza del cerchio base del cilindro sul quale la spirale è descritta al passo di essa.*

Sia ADC (*fig.* 66) la spirale cilindrica, il cui principio sia il punto A, ed essa incontri in *a* un qualunque lato S*a*T del cilindro sul quale è descritta. S' intenda per *a* condotto un piano parallelo alla base FAM di tal cilindro, ed il cerchio *fam* identico all' altro FAM sia la sezione che in esso da quello si produce. Or si supponga il cilindro *fam*AMF separato dal restante dell' intero cilindro AG, adattarsi colla sua base FMA sul cerchio *fam* in modo che il punto A cada in *a*: e siccome la legge del moto di un tal punto nel descrivere la spirale non si cambia, ne segue che il punto *a* si potrà prendere come il principio della stessa spirale che si descriveva dal punto A, la quale solamente varierà, perchè in luogo di terminare in C terminerebbe in *c*. Adunque l' arco AK*a* dovrebbe coincidere con un arco uguale della spirale *a*C*c*; che perciò gli angoli in cui inclinasi la spirale ADC a' due lati AC, ST del cilindro su cui è descritta dovranno essere tra loro uguali.

Ciò posto nel principio del moto sia AM un archetto circolare minimo, MK l' altezza contemporaneamente descritta dal punto A col suo moto progressivo, e finalmente AK l' archetto di spirale contermine; si potrà considerare come rettilineo il triangolo AMK rettangolo in M, e quindi la tangente dell' angolo AKM sarà espressa dal rapporto di MA : MK, o sia della circonferenza del cerchio FAM al passo AC della spirale (217).

223. *Scol.* La dimostrazione del precedente Teor. avrebbe potuto egualmente rilevarsi dallo Scol. della prop. precedente, mentre da questo si vede, che il triangolo PXY rappresenta lo sviluppo di quella parte della superficie cilindrica AG, ch' è tra la base FAM, e l' elica ADC in esso segnata, e che una tale elica sia per conseguenza su questo sviluppo dinotata

dalla retta PY. Finalmente che nell' ottenersi questo sviluppo non siasi affatto cambiato il sito de' lati del cilindro rispetto alla base ed alla spirale, che perciò essi debbano incontrar questa sullo sviluppo in quelli stessi angoli rispettivamente, in cui l' incontravano sulla superficie cilindrica. Adunque siccome la PY che rappresenta la spirale cilindrica sullo sviluppo PXY incontra tutte le QN, Q'N' ec. sotto lo stesso angolo, similmente sotto lo stesso angolo quanto PYA doveva incontrarli sulla superficie cilindrica. Ed un tal angolo è chiaro che abbia per tangente il rapporto di PX ad XY, le quali due rette dinotano la circonferenza del cerchio base del cilindro su cui è descritta la spirale, ed il passo di questa.

224. *Cor.* Da questa prop. si rileva che tutte le parti di una stessa spirale interposte tra i lati equidistanti del cilindro sieno identiche, e che questa curva abbia dappertutto una stessa curvatura.

PROP. LXXVIII. PROBL.

225. *Conosciuta la legge del punto che genera una spirale cilindrica sulla superficie di un dato cilindro, construire la projezione verticale di una tal curva.*

Sia FBA (*fig.* 71) il cerchio ch' è la base, e quindi la traccia orizzontale del cilindro proposto, ed il punto A preso nella circonferenza di tal cerchio dinoti il principio della spirale cilindrica, che si descrive da quel punto con tal legge che sia A'c' l' altezza progressiva alla quale esso perverrebbe nel tempo stesso che descriverebbe la circonferenza FMA, cioè sia A'c' quanto il passo della spirale. Si tiri per A il diametro AF, al quale si conduca ovunque nel piano FBA

la parallella LM, e per questa si supponga passare il piano verticale di projezione. Ciò posto è chiaro che qualunque lato del cilindro, quello, per esempio, che incontra la sua base in R debba esser projettato verticalmente in una retta R'r'r" perpendicolare alla LM, e che la parte di esso interposta tra il punto R e l'incontro colla spirale debba pareggiare la corrispondente projezione: finalmente che ogni punto della projezione della spirale debba esser tanto alto sulla LM, quanto l'è un tal punto sul piano ABF. Or si esponga la retta PX (*fig.* 70) che sia quanto la circonferenza ARF, e dal suo estremo X gli si elevi la XY uguale al passo intero della spirale: indi si prenda nella PX la quarta parte PQ la quale rappresenterà perciò la lunghezza del quadrante AB; se il punto B si projetti in B', e che poi vi si prenda al di sopra della LM la B'b' uguale alla perpendicolare QN elevata sulla PX, e fino alla PY, il punto b' rappresenterà la projezione verticale di quel punto della spirale cilindrica che corrispondeva in projezione orizzontale all' estremo B del quadrante AB Similmente dividendo l'arco AB in un dato numero di parti uguali e più piccole che si può, una delle quali sia espressa dalla AR; e la PQ in altre linee, di cui la prima sia PS, projettando il punto R in R' e poi prendendo al di sopra della LM la R'r' uguale alla ST si avrebbe quel punto della projezione verticale della spirale cilindrica ch' è in quel lato del cilindro il quale passa per R; e così sempre facendo si verrà a descrivere per punti la projezione cercata A'f c'.

226. *Scol.* 1. Si potrebbe anche, allorchè si è descritta di tal projezione una metà A'b'f, immaginare per f la retta *lm* parallela alla LM; ed è chiaro allora, che incominciando a contar la spirale dal punto F, la projezione di quell' altra metà sua, che vien descritta

contemporaneamente al semicerchio FrA debba incominciare dal punto f', ed essere identica alla prima $A'r'f'$; ond' è ch' essa potrà descriversi come questa: E le altre successive projezioni $c'h'$, $h'e'$ si potranno poi descrivere per mezzo del lemma esposto nel *n.* 188, se prendansi le $r'r''$, $b'b''$ec. tutte uguali al passo della spirale.

227. *Scol.* 2 La curva ch' è la projezione verticale di una spirale cilindrica, ad imitazione di quelle chiamate dal Leibnitz *linea de' seni*, *linea de' coseni*, e *linea delle tangenti*, la chiameremo *linea de' seniversi*; poichè in essa prendendosi per asse la A'F', e per principio delle ascisse il punto A', si ha $y : A.\ sen.\ v.\ x :: p : c$, e quindi $y = \frac{p}{c} . A.\ sen.\ v.\ x.$, dinotandosi da p il passo della spirale, e da c la circonferenza del cerchio base del cilindro.

PROP. LXXVIII. PROBL.

228. *Tirare la tangente ad una spirale cilindrica data, per un punto di essa di cui n' è data la projezione orizzontale.*

Abbia un tal punto per projezione orizzontale il punto d (*fig.* 71), e da questo si abbassi sulla LM la perpendicolare indefinita $dD'd'd'''$ ec., la quale incontri la projezione verticale della spirale in d', d'', d''' ec.; saranno i punti d', d''', ec., sempre quelli segnati con un numero impari di apici; le projezioni verticali corrispondenti di altrettanti punti della spirale cilindrica, che avranno per loro projezione orizzontale lo stesso punto dato d, or che questo si trova nella prima semicirconferenza AdF, e per ognun de' quali si tirerà la tangente alla spirale cilindrica nel modo stesso che adopreremo per condurgliela in quel punto projettato verticalmente in d', e che quindi ha per altezza orizzontale la $d'D'$.

Or poichè la tangente nel punto dato D è tale, che, se si sviluppasse la superficie cilindrica su cui è la spirale, nel piano tangente, coinciderebbe con quella retta che rappresenta lo sviluppo della spirale (223); perciò essa dovrà comprendere col lato del cilindro che passa per D un angolo la cui tangensia uguale alla circonferenza del cerchio AdF divisa pel passo della spirale, cioè $= \frac{circ. AdF}{A'c'}$. Ma deve di più la projezione orizzontale di tal tangente toccare in d questo cerchio, ed esser quindi la dU. Adunque nel triangolo formato dalla tangente cercata dalla Dd, e dalla dU deve stare la Dd alla dU come il passo della spira alla circonferenza AdF. Quindi si avrà il punto U in dove tal tangente incontra il piano orizzontale; e projettando questo punto U in U', congiunta la $U'd'$, questa sarebbe la projezione verticale corrispondente di essa: che perciò una tal tangente sarà data.

229. *Cor.* 1. È chiaro dalla construzione del precedente problema, che la dU debba pareggiare l'arco dA. Lo che verificandosi successivamente per ogni altra tangente ne segue, che il luogo di tutt' i punti ne' quali le tangenti di una spirale cilindrica incontrano il piano del cerchio base del cilindro su cui è descritta, sia un' altra spirale descritta nel piano di questa base dall' estremo di un filo il quale trovandosi fisso in A, ed avvolto intorno al cerchio $AFdA$, se ne vada mano mano svolgendo nel senso $AdFA$; che perciò una tal curva è, come si vede, la sviluppante di quel cerchio.

230. *Cor.* 2. La $U'd'$ sarà la tangente nel punto d' la curva $A'd'f'$ ec. Ed ecco in qual modo si potrà geometricamente condurre la tangente in un punto qualunque di questa curva.

PROP. LXXIX. PROBL.

231. *Data una spirale cilindrica tirare ad essa una tangente parallela ad un piano dato.*

Sia AdF (*fig.* 71) la base del cilindro su cui è segnata la spirale, ed A'c' sia il passo di essa. Siano inoltre zZ', Z'z' le tracce del piano dato, delle quali la prima si prenda perpendicolare alla LM. Ciò premesso poichè tutte le tangenti della spirale cilindrica formano co' lati di questo solido, che passano pel punto del contatto, lo stesso angolo, la cui tangente è quanto $\frac{c}{p}$; perciò è egli chiaro, che descrivendosi un cono il quale abbia l' asse coincidente con quello del cilindro, ed i cui lati formino con questo l' angolo poc' anzi detto, un tal cono dovrà avere tutti i suoi lati rispettivamente paralleli alle tangenti della spirale suddetta. Or si descriva col centro O, e col raggio OV uguale al quadrante ARB il cerchio VXY, e poi su di esso s' immagini descritto un cono che abbia per projezioni del vertice i punti O, *b'*, cioè che sia la sua altezza quanto $\frac{1}{4}p$, sarà esso uno di que' coni. Lo che è facile a comprendersi. Ciò posto per lo vertice di tal cono s' intenda condotto un piano parallelo al dato zZ'z', il quale interseghi la base del cono nella retta XY; e quindi segni in esso due lati projettati orizzontalmente in OX, OY. È chiaro da quello che si è detto che la tangente cercata avrà luogo in doppio sito della spirale cilindrica, e ch' essa avrà le sue projezioni orizzontali parallele alle OX, OY. Laonde se al cerchio AdF si tirino le tangenti parallele alle OX, OY, saranno queste le projezioni orizzontali delle tangenti cercate, e le corrispondenti projezioni verticali si determineranno come nel Problema precedente.

CAP. XIII.

DELL' EPICICLOIDE SFERICA.

232. Il Problema dal Viviani proposto agli Analisti de' suoi tempi col titolo di *Ænigma geometricum* (*) diede luogo ad Offemburgio di proporre anch' egli il seguente altro analogo: *Forare una volta emisferica con finestre di forma ovale, il perimetro di ciascuna delle quali sia assolutamente rettificabile* (*Atti di Lipsia* 1718 *pag.* 175); e Giacomo Ermanno occupatosi della soluzione di esso s' imbattè in alcune curve descritte sulla superficie della sfera in una maniera analoga a quella dell' ordinaria epicicloide, che perciò le chiamò *epicicloidi sferiche* (*Atti antichi di Pietroburgo vol.* 1 *pag.* 211); ed egli le credè dotate della proprietà di esser sempre rettificabili, ond' è che per mezzo di esse pervenivasi agevolmente alla soluzione del problema di Offemburgio. Ma se i Geometri posteriori hanno riconosciuta la debolezza dell' ingegno umano ne' ragionamenti di Ermanno, che conducono alla poc' anzi detta conseguenza fallace; ad un tale errore però dobbiamo la conoscenza di queste nuove curve, la quale è stata non solamente utile pe' progressi ulteriori della

(*) Un tal problema era il seguente: *Tra gli antichi monumenti della Grecia vi è un tempio dedicato alla Geometria, il cui piano è circolare, e ch' è sormontato da una volta emisferica forata da quattro finestre uguali, con tal arte, che il rimanente della superficie è geometricamente quadrabile. Si cercava la figura e il sito di tali finestre.*

Geometria e dell'Analisi, ma anche per le arti di construzione. La genesi delle suddette epicicloidi è la seguente.

233. *Def.* Un cono retto che abbia per lato il raggio di una sfera, e per vertice il centro di questa, si muova in modo intorno al suo vertice, che il cerchio che n'è base roti sulla circonferenza di un qualunque cerchio descritto sulla superficie della sfera stessa, finchè riadatti sulla circonferenza di questo quello stesso punto della circonferenza della base sua, col quale l'aveva toccata da principio; un tal punto, nell'intero giro del cono, verrà a descrivere sulla superficie della sfera una curva, che si chiamerà *epicicloide sferica*.

234. Il cerchio ch'è sulla sfera si dirà *cerchio immobile*; e l'altro, ch'è base del cono, si dirà *cerchio mobile* o *generatore*.

235. Così sia ADF un cerchio qualunque segnato in una sfera il cui centro è il punto O, ed il cono ABCO, che ha il vertice in O, ed il lato OA quant'il raggio di tale sfera, roti intorno ad O in modo che la circonferenza della sua base CBA scorra sopra quella del cerchio ADa; allorchè il punto A della circonferenza ABC si vede di nuovo adattarsi in a sulla circonferenza del cerchio ADa, si sarà descritta sulla superficie della sfera proposta l'*epicicloide sferica* AEa. E l'arco ADa del cerchio immobile, ch'è tra i due estremi A, a dell'epicicloide sferica, e ch'è quello sul quale si è mossa la circonferenza del cerchio mobile lo diremo *base*.

236. *Cor.* Dalla definizione precedente si rileva, che nell'epicicloide sferica la circonferenza intera del cerchio mobile debba pareggiar la base dell'epicicloide sferica, che perciò se il cerchio mobile e l'immobile

fossero stati uguali, l'epicicloide sferica avrebbe avuto il suo termine nel punto stesso ove aveva avuto il suo principio; che se il cerchio mobile fosse stato minore dell'immobile, in tal caso la base dell'epicicloide sferica sarebbe un arco di quest'ultimo cerchio. Finalmente supponendo il cerchio mobile maggiore dell'immobile, la base dell'epicicloide verrebbe ad essere maggiore della circonferenza del cerchio immobile; vale a dire che per descriversi l'intera epicicloide sferica in questo caso, dovrebbe il cerchio mobile percorrere più di una volta la circonferenza del cerchio immobile; e quindi l'epicicloide sferica verrebbe ad avere più di un ramo sulla superficie sferica nella quale è descritta.

237. *Cor.* 2. Se per un punto comune alle circonferenze de' due cerchi mobile ed immobile si tiri la tangente ad una di esse; questa dovrà essere anche tangente all'altra; che perciò i raggi di que' cerchi condotti a tal punto di contatto, essendo perpendicolari a quella tangente, comprenderanno l'angolo d'inclinazione del piano del cerchio mobile a quello dell'immobile, in quel punto, o pure il supplemento di esso. Or un tal angolo è supplemento di quello che comprendono tra loro l'asse del cono, e la congiungente il centro della sfera col centro del cerchio immobile, il quale è costante, che perciò anche costante sarà il primo; vale a dire, che il *piano del cerchio generatore dell'epicicloide sferica s'inclina sempre sotto l'angolo stesso al piano del cerchio immobile*.

238. *Cor.* 3. Che perciò è chiaro, che tutti que' raggi, che dal centro del cerchio mobile si tirano a que' punti ov'esso tocca il cerchio immobile, inclinandosi sotto uno stesso angolo al piano di questo, rappresentino i lati di una superficie cilindrica, la cui base è il cerchio immobile; ed il centro del cerchio mobile per-

correrà, per conseguenza, su questa superficie cilindrica un arco di cerchio uguale e parallelo alla base dell' epicicloide sferica.

239. *Scol.* Il Lexell in una sua Memoria delle epicicloidi sferiche inserita negli *Atti di Pietroburgo* per l'anno 1779. P. I. si occupa ad assegnare l'equazione di tali curve, a far rilevare non esser vero ch' esse sieno generalmente rettificabili, limitandosi questa proprietà al solo caso che il cerchio mobile sia quanto il cerchio massimo della sfera, cioè che il cono il qual s' impiega a descrivere l' epicicloide sferica in una data sfera sia equilatero. Egli inoltre assegna la tangente per un punto qualunque dell' epicicloide sferica, ne determina il raggio di curvatura, quadra alcuni trilinei compresi sulla superficie della sfera tra un arco del cerchio immobile, un arco epicicloidale, e l' arco di cerchio massimo della sfera condotto per gli estremi di quello e di questo. Finalmente esamina le altre curve che descrivonsi da un qualunque punto preso nel piano del cerchio mobile, nel giro ch' esso fa per descrivere l' epicicloide sferica. Or di tutte queste ricerche, che potranno dalla citata Memoria rilevarsi, noi non imprenderemo qui ad esaminare, perchè confacenti al nostro argomento, che la sola di condurre la tangente all' epicicloide sferica, per un punto dato in essa, avvalendoci però de' soli mezzi che la Geometria ci somministra a tal uopo, e ad essa vi premetteremo l' altra di esibire le projezioni di un epicicloide descritta su di una data sfera, dati il cerchio mobile e l' immobile, le quali tre cose sono i convenevoli determinanti della forma e del sito di una tal curva. Intanto per porre nelle seguenti ricerche tutto quel rigore che la buona Geometria esige, vi premetteremo i seguenti lemmi.

LEMMA I. PROBLEMATICO

240. *Dividere un arco dato, in data ragione.*

PRIMA MANIERA PER MEZZO DELLA SPIRALE CILINDRICA.

Il cerchio ABF (*fig.* 73) sia la base di un cilindro sul quale vi stia segnata la spirale cilindrica ADC, e concentrico al cerchio ABF vi si ponga quell' altro di cui è parte l' arco dato GHK, e questo si prenda dal punto G ove lo incontra il diametro FA del primo. Sia inoltre P : Q la ragione data secondo la quale bisogna dividere l' arco GK.

Si unisca la OK, la quale incontri la circonferenza della base del cilindro nel punto B, pel quale si tiri il lato BE di quel solido, e questo incontri in L l' elica. Inoltre la BL si divida in N nella ragion data, sicchè stia BN : NL :: P : Q, e per N si conduca l' arco di cerchio NM parallelo ad ABF, cioè si seghi il cilindro con un piano che passi per N, e sia parallelo alla base. Finalmente per lo punto M si tiri nel cilindro l' altro lato MR, che incontri in R la circonferenza della base: l' arco AB si sarà diviso in A nella ragion data, cioè starà AR : RB :: P : Q.

Imperocchè per la natura dell' elica sta l' arco circolare AB all' altro AR come BL, ad RM (218), e dividendo l' arco AR all' arco RB, come BN ad NL, cioè come P : Q. Laonde l' arco AB resta diviso nella data ragione in R, e quindi il suo simile GK dovrà restar similmente diviso in H.

241. Ed una tal construzione sarà presto effettuita in un piano, quando si abbia la projezione della spirale cilindrica. In fatti sia ABF (*fig.* 74) la base del cilindro, e sia *adc* la projezione verticale della spirale

cilindrica segnata su quel cilindro, la qual projezione si supponga data. Si tiri nel cerchio ABF il diametro AF parallelo alla LM, e dal suo estremo A corrispondente al principio *a* della projezione dell' elica si prenda l' arco AB simile al proposto a dividersi nella data ragione. Dal punto B si abbassi su di LM la perpendicolare indefinita BB'*b'*, sarà B'*b'* la projezione del lato BL nella *fig.* 73, e *b'* la projezione del punto L ch' è nell' elica. Or si divida la B'*b'* in *n'* nella data ragione di P : Q, e per *n'* si conduca la *n's'* parallela alla LM, saranno *n'*, *n's'* ed *s'* le corrispondenti projezioni del punto N, dell' arco NM, e del punto M nella figura precedente. Quindi abbassandosi dal punto *s'* sulla LM la perdicolare indefinita *s'*R'R, che incontri in R la circonferenza del cerchio ABF, sarà *s'*R' la projezione verticale del lato RM nella figura 73, ed il punto R dinoterà quello in dove esso incontrava la base del cilindro, o sia quel punto in dove l' arco AB restava diviso nella ragion data.

SECONDA MANIERA PER MEZZO DELLA CICLOIDE GALILAICA.

242. Sia una qualunque semicicloide volgare AED (*fig.* 75), ed intorno al suo asse AC vi sia descritta la metà ABC del cerchio che la genera. Dal punto A su tal semicirconferenza vi si prenda l' arco AB simile al proposto a dividersi nella ragion data, il qual si supponga, per ora, esser non maggiore della semicirconferenza, e per B si tiri la EBI parallela alla CD, e si divida la EB in *b* nella ragion data, in modo che stia B*b* : *b*E :: P : Q. Inoltre si prenda la *bi* uguale alla BI, per lo punto *i* si conduca la *cia* parallela ad uguale alla CIA, ed intorno ad essa come diametro si descriva il semicerchio *cba*, che dovrà passare ne-

cessariamente per lo punto *b*, ed intersegare la semicicloide AFD in un punto F, per lo quale si tiri FG parallela a DC, sarà G quel punto nel quale l' arco AB resta diviso come si cerca.

Imperocchè dalla costruzione e dal *n*.189 si rileva, che B*b* pareggi GF; e dalla natura della cicloide volgare AFD è noto, che gli archi circolari AG, AB sieno quanto le rispettive semiordinate GF, BE condotte nella cicloide. Laonde starà BGA : GA :: BE a GF, e dividendo BG : GA :: E*b* : FG, o *b*B, cioè come Q : P, Adunque ec.

Che se si proponga a dividere un arco del cerchio ABC maggior del semicerchio il qual sia perciò composto dal semicerchio ABC, e da un qualunque altro arco AB. In tal caso, si rileverà facilmente che basterà dividere nella stessa ragione di P : Q sì il semicerchio ABC, che l' arco AGB, il primo in X, e l' altro in G; sarà AX + AG una delle parti dell' intero arco proposto, e l' altra sarà XC + GB.

Ed in fine dalla soluzione precedente si rileva, in qual modo dall' essersi diviso in data ragione un arco del cerchio ABC simile al dato, si pervenga alla stessa divisione per questo.

243. *Scol.* Tra gli altri rimarchevolissimi monumenti della scienza degli antichi Geometri circa la natura de' Problemi, uno indubitato ce n' offre il precedente problema di cui Pappo nel IV. libro delle sue Collezioni Matematiche alla prop. xxxv., dice: *Datum quidem angulum, vel circumferentiam tripartito secare solidum est, ut ante ostendimus, sed datum angulum vel circumferentiam secare in datam proportionem lineare est, et a junioribus demonstratum fuit*. Ed egli poi reca due metodi diversi, che quelli usarono per

risolverlo, avvalendosi in uno della quadratrice di Dinostrato, e nell' altro della spirale Archimedea. Noi però abbiamo stimato di preferire a queste due curve impiegate dagli antichi, a tal uopo, la spirale cilindrica, e la cicloide volgare, imitando in ciò il Viviani (*); poichè quest' ultima principalmente, per la facilità a potersi descrivere meccanicamente con uno strumento semplicissimo, può offrir gran comodo in pratica, ove abbisogni far uso del precedente problema; e l' altro metodo, oltre al potersi anche convertire in un meccanismo agevole ed ingegnoso, come il Viviani ha fatto rilevare, ci è servito a mostrare qual uso vantaggioso possa farsi della spirale cilindrica nella soluzione di alcuni problemi trascendenti. Finalmente per complètare quest' argomento ci riserbiamo a dare altrove, come una convenevole applicazione di altre teorie, che ivi esporremo, un terzo metodo agevole quanto ciascun de' precedenti, per risolvere lo stesso Problema, e che abbiamo anche ricavato dalla citata operetta del Viviani.

LEMMA II. PROBLEMATICO.

244. *Dati due cerchi disuguali, troncar dalle loro circonferenze due archi uguali.*

Sieno AGB, CHD (*fig.*76) i due cerchi proposti, ed AGB il maggiore; e dinotino ABG, CDH gli archi uguali presi in essi: è chiaro, che supponendo tali cerchi concentrici, e congiunto il centro comune O coll' estremo G dell' arco preso nel cerchio maggiore, il raggio OG intersegando la circonferenza del cerchio interiore CHD vi debba segnare l' arco CK simile ad

(*) Veggasi il suo *Diporto Geometrico* verso la fine.

ABG, e minore di questo, e quindi di CH. Or per esser simili gli archi ABG, CDK sono essi come le intere circonferenze, e quindi come i raggi OA, OC; che perciò starà anche CDH : CDK :: OA : OC, e dividendo HK : CDK :: AC : CO, la qual ragione è data. Laonde il presente Problema si è ridotto al precedente.

PROP. LXXX. PROBL.

245. *Dati i due cerchi, l'uno immobile, e l'altro che genera l'epicicloide sferica, e di più l'angolo della loro scambievole inclinazione, construire le projezioni di una tal epicicloide.*

Prendasi per piano di projezione orizzontale quello del cerchio immobile dato ABC (*fig.*77), ed il piano verticale passi per lo centro O di tal cerchio. Dal punto B ove la LM intersega la circonferenza del cerchio immobile si prenda su di questa l'arco BD uguale alla semicirconferenza del cerchio mobile dato (*lem.*2.), e D per principio dell'epicicloide sferica, sarà B quell' altro punto della base di essa in dove il cerchio mobile tocca l'immobile, allorchè avendo compiuta una semirivoluzione, ha adattato, nell'epicicloide che esso descrive, il punto opposto del diametro che passa per B. Laonde patentemente apparisce, che se al punto B della BM si costituisca nel piano verticale l'angolo MBR uguale a quello in cui inclinasi il cerchio mobile all'immobile, e si prenda su di BR la B*f* uguale al diametro del primo cerchio, il punto *f*, debba essere, supponendo il piano verticale nel suo vero sito, il vertice dell'epicicloide sferica proposta, e nel tempo stesso la projezione verticale di tal vertice; e che la

corrispondente projezione orizzontale di questo punto debba essere l'altro punto F' ove la perpendicolare fF' alla LM incontra una tal comune sezione.

Or per avere la projezione di un qualunque altro punto della proposta epicicloide sferica, si supponga il cerchio mobile toccare la base DBE di questa nel punto G, per dove si tiri al cerchio immobile la tangente GH, che rappresenterà la comune sezione de' piani di questi due cerchi, allorchè il primo di essi si trova in tal luogo; e si supponga esser GKI il cerchio mobile abbattuto sul piano dell' immobile. Si prenda in esso l'arco $GK = GD$ (*lem.* 2.), sarà K il punto che si dovrà trovare nell' epicicloide sferica, allorchè il cerchio mobile tocca la base DBE in G. Or abbassandosi da K sulla GH la perpendicolare KN, è chiaro che allor quando un tal cerchio ritornasse nel suo vero sito, la KN verrebbe a descrivere un piano verticale. Adunque la projezione orizzontale del punto K dell' epicicloide dovrà cadere nella KN. Per determinarla si prenda sulla BR la $Bx = KN$, che rappresenta perciò, in grandezza, l'ordinata per lo punto K dell' epicicloide, e dal punto x si abbassi la perpendicolare xX' alla LM; è manifesto che se prendasi nella NK la $Nk = BX'$, il punto k sarebbe la projezione orizzontale del punto K dell' epicicloide sferica: e siccome l'altezza orizzontale di tal punto è dinotata dalla xX', così si avrebbe la corrispondente projezione di esso, abbassando da k sulla LM la perpendicolare $kK'k'$, e prendendovi la $K'k' = X'x$; sarebbe k' una tal projezione. Laonde così facendo continuamente, si verrà ad assegnare per punti la curva DkF, nel piano orizzontale, che sarà la projezione orizzontale della semiepicicloide proposta; e l'altra curva $D'k'f$, che passerà per tutti gli altri punti k', nel piano verticale, ne sarà la corrispondente pro-

jezione verticale. Ed è poi chiaro, che la projezione orizzontale della rimanente semiepicicloide sia l'altra curva F'PE identica alla DkF', e che la projezione verticale di questa sia la stessa D'k'F'.

246. *Cor.* Si rileva dalla construzione del precedente Problema, che avendosi le projezioni EF'D, D'k'f di un'epicicloide sferica, si avrà immantinente il diametro del cerchio mobile che l'ha generata, congiugnendo il punto medio B della base EBD di essa col punto f estremo della sua projezione verticale.

PROP. LXXXI. PROBL.

247. *Date le projezioni di un punto di una epicicloide sferica data; determinare quel punto della base di essa ove il cerchio mobile che la genera, nel passare per lo punto dato, tocca una tal base.*

Si determini il cerchio generatore (245), ed esso sia quello descritto intorno al diametro PQ (*fig.*78, e 77); e per lo punto P gli si tiri la tangente PS. Or siano k, k' le projezioni del punto dato, e quindi k'K' l'altezza di esso sul piano orizzontale; ed una tal retta si applichi nell'angolo RBM perpendicolarmente alla BM, e sia la X'x, sarà Bx uguale alla perpendicolare, che dal punto dato si abbassa sulla tangente del cerchio immobile, nel punto ov'esso è nel tempo stesso toccato dal cerchio mobile, e la BX' sarà quanto l'altra perpendicolare che dalla projezione k di tal punto si abbasserebbe sulla stessa tangente; le quali cose tutte rilevansi dalla construzione del precedente Problema, cioè supponendo esser G il punto del contatto cercato, GH la tangente un tal cerchio in G, sarebbe Bx = NK, e BX' = Nk. Ciò posto si prenda sulla PS la Ps uguale

alla Bx, e per s si tiri la sT perpendicolare alla PS, il punto T ove questa perpendicolare incontra il cerchio PQT sarebbe quel punto del cerchio mobile, che deve trovarsi nell' epicicloide proposta projettato in k, k', allorchè un tal cerchio tocca l' immobile coll' altro suo punto P. Laonde questo punto di contatto dovrà cadere in quel punto della base, che dista dal principio dell' epicicloide per un arco del cerchio immobile uguale all' arco PT. Quindi se si prenda dal punto D sulla circonferenza DBE, l' arco DG uguale all' arco PT (244), sarebbe G il punto di contatto cercato.

248. *Cor.* Ed è anche chiaro che congiunta la corda PT questa sarebbe quanto la distanza rettilinea che v' è tra il punto dato, e quello ove il cerchio mobile che passa colla sua circonferenza per esso, tocca l' immobile.

PROP. LXXXII. PROBL.

249. *Per un punto dato nell' epicicloide sferica condurle la tangente.*

Sieno k, k' (*fig.*77) le projezioni del punto dato, sarà chiaro che se per questi punti si tirino alle projezioni DFE, $D'k'f$ di una tal epicicloide le tangenti $k'V'$, kv saranno queste le projezioni della tangente cercata (213).

ALITER

250. Sieno come poc' anzi k, k' le projezioni del punto dato, e si determini primieramente il punto G ove il cerchio mobile passante per lo punto dato tocca l' immobile (247), resterà in tal modo anche determinata la corda GK di quello, la quale rappresenta

la distanza tra il suddetto punto di contatto e 'l punto dato (248). Or è egli chiaro, che nello scorrer che fa il cerchio GIK sull' arco DGE, per generar l'epicicloide, si possa concepire senza errore sensibile, che descrivendosi dal punto G un arco minimo le corde che dagli estremi di tal arco vanno a' punti corrispondenti di detta epicicloide, cioè agli estremi corrispondenti dell' archetto epicicloidale, che in tal moto si descrive dal cerchio mobile, sieno concorrenti nello stesso punto G, ed uguali; che perciò quell' archetto epicicloidale si vedrà appartenersi ad una superficie sferica che avrà G per centro, ed il raggio dato GK. Ma dovevasi anche un tal archetto epicicloidale ritrovare, per la natura di questa curva, sulla superficie sferica del raggio OB (233). Adunque esso esisterà nell' intersezione di tali due superficie sferiche: che perciò se pel punto dato si tiri a ciascuna delle suddette superficie sferiche un piano tangente, questi intersegandosi determineranno la tangente dell' epicicloide sferica proposta, nel punto dato in essa.

Ed in questo caso, se si determini il punto *v* ove tal comune sezione, ossia tal tangente, incontra il piano di projezione orizzontale, ed un tal punto *v* si projetti in V' sul piano verticale, congiugnendo le *vk* V'*k'* sarebbero queste le tangenti in *k*, *k'* le curve DKE, D'*k'f'* che rappresentavano le projezioni della data epicicloide.

CAP. XIV.

DI ALCUNI PROBLEMI GEOMETRICI RISOLUTI PER MEZZO DE' LUOGHI ALLA SUPERFICIE.

251. La teoria delle intersezioni, e quella delle curve a doppia curvatura non è un oggetto di pura speculazione, e valevole solamente nelle arti di construzione, essa ci offre anzi de' mezzi eleganti da risolvere alcuni problemi trascendenti, pe' quali veruna risorsa non ci dà la Geometria. E gli antichi a' quali mancava la conoscenza di descrivere le curve coniche in un piano, dovettero ricorrere alla combinazione delle superficie coniche in cui tali curve erano segate, per poter per mezzo di esse risolvere quella classe di Problemi, ch' essi perciò chiamarono solidi, come raccogliesi da quel luogo di Pappo, ov' egli dice, parlando di questi tali problemi: *solida appellantur, namque ad constructionem necesse est solidarum figurarum superficiebus, nimirum conicis uti*. Che perciò essi, gelosi della purità geometrica, non vollero ricevere in Geometria le soluzioni di questi Problemi, che parevan loro implicate di meccanismo; ond' è che Pappo stesso disse parlando del problema delle due medie proporzionali (*): *Antiqui Geometrae problema antedictum, in duabus rectis lineis, quod natura solidum est*, geo-

(*) *Collez. Matem. lib. III. dopo la Prop. 4.*

metrica ratione innixi construere non potuerunt, quoniam neque coni sectiones facile est in plano designare. E di questi problemi solidi trovansene anche presso gli antichi altre soluzioni fatte colla combinazione di diverse altre superficie curve, come tra poco faremo vedere.

Ma ecco in succinto in quali casi, ed in che modo convien far uso della combinazione de' *luoghi alla superficie* nella risoluzione de' problemi.

252. Una linea descritta in un piano con una legge costante ha per proprietà sua questa legge stessa del punto che la genera, e tutte quelle altre, che da tal genesi si derivano, cioè, per esprimermi col linguaggio proprio de' Geometri, è il *luogo geometrico* di tutti que' problemi indeterminati per un grado, cui si appartiene per quesito taluna di quelle proprietà; sicchè a render determinato uno di questi tali problemi non bisognandovi che un' altra condizione sola, e questa contenendosi per proprietà in un' altra simil locale, debbon perciò dalla combinazione di esse risultare que' punti, che soddisfano al quesito di quel problema geometrico determinato, che risulta dall' accoppiamento delle succennate due condizioni. E ciò in più problemi di questo trattato si trova anche manifestamente praticato. Similmente una linea che muovasi nello spazio con una legge costante genera una superficie, che ha per proprietà la legge stessa, che perciò questa proprietà si trova trasportata dalle due alle tre dimensioni, e quindi l' indeterminabilità del luogo di essa trovandosi accresciuta per un grado, vi bisogneranno perciò due altre condizioni appartenentisi ad altre locali, che sieno anche delle superficie, perchè dalla loro combinazione resti risoluto un problema determinato per mezzo di luoghi alla superficie. E ciò chiaramen-

le rilevasi anche dal vedere, che combinando insieme due superficie come locali esprimenti due condizioni diverse di un geometrico problema determinato, da tal combinazione non risultino già i punti soddisfacenti al quesito; ma si bene quella linea ch' è il luogo geometrico di essi, di un grado però più determinato che non lo era, quando consideravasi una di quelle due locali separatamente. Adunque ogni ricerca geometrica i cui punti che vi debbon soddisfare debbono ritrovarsi nelle tre dimensioni, ha bisogno di tre condizioni, per essere determinata, e ciascuna di tali condizioni deve appartenersi ad un luogo alla superficie. E di ciò che abbiamo generalmente quì detto se ne vedranno alcuni esempj ne' problemi che or proporremo nel presente Capitolo.

253. Risulta da tutto ciò, che le superficie curve sono un' altra specie di luoghi geometrici nello spazio, indeterminati per due gradi, e ch' essi si adoperano utilmente nella construzione di quelle geometriche condizioni, che sono anche indeterminate per due gradi.

254. Ed è qui a proposito il far avvertire, che gli antichi Geometri coltivarono anche quest' altra specie di luoghi geometrici, de' quali si avvalsero per la risoluzione di taluni difficili problemi; ma a noi di questi loro studj, che pur dovevano esser ben degni del loro ingegno penetrante, e sapere profondo, nulla è pervenuto, fuor solamente di una notizia tramandataci da Pappo, cioè, ch' Euclide scrisse due libri *de' luoghi alla superficie*, che nel *luogo di Risoluzione* venivan dopo i cinque libri de' *luoghi solidi* composti da Aristeo seniore, e di alcune soluzioni eseguite con la combinazione di questa specie di locali, che lo stessò Pappo ed altri geometri antichi ci hanno conservate, tra le

quali quella di Archita del celebre problema delle due medie proporzionali, che noi più appresso rapporteremo, e ch'è ben degna della sagacia, e del saper geometrico del suo autore. In verità deve non poco dolerci, che i due su mentovati libri di Euclide non ci sieno pervenuti, e molto più che nè tampoco vi sia restata quella notizia del contenuto di essi, che Pappo dovè darne nella Prefazione al Libro VII. delle sue Collezioni Matematiche, come di molte altre opere del luogo risoluto trovasi da lui fatto, il che è stato a' moderni coltivatori della Sintesi di sprone a restituirle. Con tutto ciò però non v' ha dubbio, che l' accortissimo Sig. Montucla siasi ingannato, allorchè ha detto, che gli antichi per questa specie di luoghi intendevano alcune linee a doppia curvatura, o descritte con una determinata legge su di una superficie curva. Imperocchè tali luoghi geometrici, come da Pappo stesso l' apprendiamo, non sono che veri luoghi alla linea. In fatti ecco come egli si esprime parlando de' tre generi in cui gli antichi distinguevano i problemi (*): *Relinquitur tertium genus problematum, quod lineare appellatur; lineae nam aliae praeter jam dictas in constructionem assumuntur, quae varium et difficilem ortum habent, ex inordinatis superficiebus, et motibus implicatis factae. Ejusmodi vero sunt etiam lineae, quae in locis ad superficiem dictis inveniuntur*, ec. Se dunque egli espressamente dice che quelle linee si trovano su i luoghi alla superficie, segno è che per questi luoghi dovevansi intendere delle superficie curve, e non già delle linee descritte in esse. E ciò che in seguito del luogo citato si continua a dire dallo stesso

(*) *Collez. Matemat. dopo la prop. 30 lib. IV.*

autore, ci conferma nell' opinione di poc' anzi, che gli antichi molto si fossero occupati de' luoghi alla superficie, e delle linee curve in generale, mentre abbiamo, che di queste ne considerò in gran numero il Geometra Demetrio Alessandrino in un libro perduto che aveva per titolo *De linearibus aggressionibus*, e che Filone Tianeo fece molti sforzi ingegnosi in questo genere, che nè pur ci sono pervenuti. E solamente, il che deve accrescere il nostro dispiacere, per tal perdita, ci ha Pappo lasciato notato, che le considerazioni geometriche di costui versavansi su talune linee curve, *quae multa et admirabilia simptomata continent*; che i Geometri posteriori fecero di esse sì gran conto, che ne scrissero de' lunghi trattati; e che Menelao chiamò una di esse col nome di *ammirabile*. Quanta dottrina abbiamo noi perduta degli antichi, e quanto aveva ben ragione il Newton loro ammiratore, perchè conoscitore del merito sommo, ch' essi avevansi acquistato colle loro geometriche ricerche, di dire, che tutto ciò che a noi è pervenuto del loro sapere non è che un saggio delle loro scoperte. Ignoriamo noi dunque perfettamente un gran numero di loro metodi, e di loro ricerche geometriche principalmente in questo genere. Nè si può intendere su qual fondamento il Montucla abbia sostenuto, che le linee curve considerate da Filone Tianeo (*), erano particolarmente prodotte dall' intersezione di un piano con certe superficie curve dette πληκτοειδεις (*complicatae*), mentre di ciò non se ne trova indicazione, nè traccia alcuna presso gli an-

(*) *Mont. Part. I. Lib. V. p. 317.*

tichi. Ciò che poi fossero tali superficie fu già indicato nell' Introduzione al presente Trattato, e di esse ne sarà trattato nel Capo seguente.

255. Dopo l' incidente discussione della differenza che dovevan fare gli antichi tra i luoghi alla superficie, e le linee curve segnate in esse, al che ci ha obbligato la contraria opinione del Montucla, ritornando al nostro oggetto, conviene avvertire, che que' geometri dopo tanti sforzi per risolvere un problema per mezzo di tali luoghi, nè pur pervenivano alla determinazione del quesito in una maniera così completa, come lo possiamo noi per mezzo dell' ovvia dottrina delle projezioni, vale a dire riducendo i determinanti del quesito su di un piano di sito, il che ne rende comoda ed elegante la construzione di esso; per lo che le loro construzioni, sebbene eleganti e maravigliose, restavano però nel campo dell' immaginazione; ond' è che il Montucla parlando della soluzione di Archita del problema delle due medie proporzionali, la quale, come si vedrà tra poco, era eseguita coll' intersezione di tre diverse superficie curve, la chiama *intellettuale*. Laonde per questa parte puramente speculativa merita anche di entrare a far parte della buona istituzione geometrica la moderna Geometria di Sito.

PROP. LXXXIII. TEOR.

255. *Descrivere una sfera per quattro punti dati.*

Sieno A, B, C, D i punti dati, e da uno di essi A a ciascuno degli altri tre s' intendano condotte le rette AB, AC, AD. Egli è chiaro che il centro della

sfera cercata dovendo essere equidistante da' punti A, B dovrà essere allogato nel piano ch' è perpendicolare alla AB nel punto medio di essa. Similmente, per esser tal centro equidistante da' punti A, C, dovrà aver per luogo geometrico quel piano perpendicolare alla AC, che passa per lo punto medio di questa. Finalmente, per la stessa ragione di poc'anzi, un tal centro dovrà aver per luogo geometrico quell' altro piano perpendicolare alla AD nel punto medio di essa. Or questi tre piani sono dati di sito, e quindi di sito sono anche date quelle rette in cui uno di essi intersega ciascuno degli altri due (73). Adunque sarà pur dato di sito quel punto ove queste rette s' intersegano (55), ch' è il centro della sfera cercata.

Ciò posto, potendosi i piani di projezione prendere ad arbitrio, per render più facile la construzione di questo Problema, prendasi per piano orizzontale quello che passa pe' tre punti dati A, B, C (*fig.*79), e sia l'altro punto D projettato in d su di tal piano: congiungansi le AB, AC, BC, Ad, ed a quest' ultima le si tiri nel piano stesso una parallela LM, per la quale si concepisca passare il piano di projezione verticale; caderanno le projezioni verticali de' punti A, B, C nella LM in A', B', C', e quella del punto D caderà in un punto d' della perpendicolare dD'd' ad essa LM.

Ciò posto, si bissechino le AB, AC, e da' loro punti medj e, f le si erigano, nel piano ABC, le perpendicolari eg, fg; saranno queste le tracce orizzontali di due piani verticali perpendicolari ad esse AB, AC ne' loro punti medj: e dovendo il centro della sfera cercata trovarsi nell' intersezione di questi piani, ch' è perpendicolare in g al piano ABC, sarà perciò g la projezione orizzontale di tal centro.

Or dovendo essere, a cagione della posizione che

si è data al piano verticale, la AD parallela alla sua projezione verticale $A'd'$; il piano ch'è perpendicolare alla AD nel suo punto medio, lo dovrà essere anche al piano verticale, e passare colla sua traccia pel punto h' medio della $A'd'$; sarà perciò questa traccia dinotata dalla perpendicolare $h'g'$, tirata per h' alla $A'd'$: e dovendo il centro cercato esistere in esso piano, dovrà la projezione verticale sua cadere nella $h'g'$; sarà dunque questa il punto g' ove la perpendicolare gGg', da g abbassata sulla LM, incontra essa $h'g'$. Finalmente, essendo Ag, $A'g'$ le projezioni del raggio della sfera, è chiaro, che se prendasi GF' uguale alla Ag, congiunta la $g'F'$, sarà questa quanto un tal raggio.

257. *Scol.* È facile a rilevarsi che l'analisi geometrica del precedente problema, adattabile anche all'altro di una sfera che dovesse toccarne quattro altre uguali, sia una modificazione dell'analisi geometrica dell'altro recato nella prop. LXII.

PROP. LXXXIV. PROBL.

258. *Inscrivere una sfera in una piramide triangolare data.*

Prendasi per piano orizzontale la base della piramide data, e fatti passare pe' tre lati di tal base tre piani, che le sieno inclinati ad angoli, ciascuno quanto la metà di quello in cui le sono inclinate le corrispondenti facce di essa piramide; dovrà il centro della sfera cercata esistere, come si può facilmente comprendere, in ognuno di questi piani; che perciò esso si esibirà determinando l'intersezione de' suddetti piani che lo contengono.

Adunque per construire questo Problema, esigonsi due cose; primieramente si vuol determinare

l' inclinazione di ciascuna faccia della piramide alla base sua; e poi bisogna construire quel piano che bisseca quest' angolo diedro. Or sebbene queste due cose comprendansi nelle soluzioni de' Problemi recati ne' *numeri* 70 e 68; esse possonsi non pertanto eseguire più facilmente nel caso presente nella maniera che qua giù ne rapporto.

Sieno a, a' (*fig.* 80) le projezioni del vertice della piramide proposta, e BCD la sua base la quale prendasi per piano di projezione orizzontale. Si abbassi da a su di un lato BC la perpendicolare ah, ed ascissa sulla LM dal punto A' la A'H' uguale alla ah, si unisca la a'H', sarà l' angolo A'H'a' uguale all' altro ahA, cioè all' inclinazione della faccia della piramide, che passa per BC, alla sua base BCD: e se si bissechi l' angolo A'H'a' colla H'f, sarà il punto p', ove questa H'f incontra la A'a', la projezione verticale di quello dove l' altezza Aa della piramide è incontrata dal piano che bisseca l' angolo diedro, che il piano ABC comprende colla base BCD della piramide. Quel tal piano potrà dunque esibirsi pel *n.* 63. E nel modo stesso si potrà anche esibire ciascuno degli altri due in cui esiste il centro cercato; che perciò questo resterà agevolmente determinato adoperandovi la construzione della prop. XXV.

PROP. LXXXV. PROBL.

259. *Esibire un punto il quale serbi distanze date da tre altri punti dati nello spazio.*

Questo problema è lo stesso che quello della piramide triangolare esibito nel §.170., che perciò potrà ad esso recarsi una di quelle stesse due soluzioni che nella citata proposizione furono riportate per questo.

LEMMA

260. *Se sul rettangolo per l' asse di un cilindro retto a base circolare v' insista perpendicolarmente un piano inclinato alla base di tal solido ; la sezione che in questo si produrrà da quel piano segante sarà un' ellisse ; ed avrà per asse maggiore quella retta in cui questo piano segante incontra quel rettangolo , e l' asse minore quanto il diametro del cerchio base del cilindro.*

Sia ABCD il rettangolo per l' asse nel cilindro retto AKBCD , ed il piano segante inclinato alla base AKB , e perpendicolare al rettangolo ABCD si supponga , per più semplicità , passare per lo punto A , sicchè formi col rettangolo la comune sezione AE . Si prenda in questa un qualsivoglia punto F , dal quale si abbassi sulla AB la perpendicolare FH , e da' punti F , H si elevino le FG , HK perpendicolari al piano ABCD , e sino alla superficie cilindrica : saranno esse parallele ed uguali , ed una di esse la FG rappresenterà la semiordinata per lo punto F nella sezione AGE, l' altra, la semiordinata per lo punto corrispondente H nel semicerchio AKB .

Or poichè $FG^2 = HK^2 = AHB$, sarà perciò $GF^2 : AF \times FE :: AH \times HB : AF \times FE$, e quindi in ragion composta di AH ad AF , e di HB ad FE , le quali due ragioni essendo uguali alla stessa di AB : AE, sarà $FG^2 : AFE :: AB^2 : AE^2$. Laonde la curva AGE dovrà essere una semiellisse , ed AB , AE dovranno dinotare due rette proporzionali a' suoi assi . Ma di queste la AE dinota effettivamente l' asse maggiore . Quindi dovrà essere AB quanto l' asse minore . Adunque ec.

261. *Cor.* Ed è chiaro che il semiasse maggiore stia al minore, come il raggio al coseno dell'angolo in cui il piano segante il cilindro s'inclina al piano della base di questo solido.

PROP. LXXXVI. PROBL.

262. *Esibire un punto nello spazio, date le distanze ch' esso serba da tre rette di sito.*

Il punto cercato dovendo serbar distanze date da tre rette di sito, dovrà avere per luoghi geometrici le tre superficie cilindriche che hanno per assi le tre rette date, e per raggi rispettivi le distanze, che tal punto si suppone serbare da quegli assi. Laonde un tal punto consistendo in queste tre superficie cilindriche, risulterà dal construire l'intersezione di una di esse con ciascuna delle altre due; poichè allora i punti in cui s'incontrano le suddette due intersezioni saranno quelli che soddisfano al Problema.

Per ciò eseguire, si determinino i punti ne' quali le tre rette date incontrano un' istesso piano di projezione (50), per esempio, l'orizzontale, e poi preso per centro ciascuno di questi punti, co' semiassi il minore quanto la distanza rispettiva che da ciascuna di esse serba il punto cercato, e 'l maggiore quanto la quarta proporzionale in ordine al coseno dell'angolo d'inclinazione orizzontale dell' istessa retta di sito, al raggio, e ad una tal distanza, preso un tal asse sulla projezione orizzontale di quella retta, si descriva un' ellisse; sarà questa la traccia orizzontale di ciascuna superficie cilindrica, ch' è una delle tre locali del Problema (260 e 261). Se dunque si construiscano le intersezioni di una di tali superficie con ciascuna

delle altre due (180); que' punti ne' quali si taglieranno le projezioni rispettive di queste due intersezioni, rappresenteranno su ciascuno de' piani di projezione le projezioni corrispondenti di que' punti che soddisfano al Problema.

263. *Scol.* In seguito dell' indicazione che qui si è recata della maniera di risolvere il proposto problema, riuscirà facile a chiunque eseguirla graficamente, avvalendosi del metodo proposto nella prop. LXV. per construire l' intersezione di due superficie cilindriche date. Intanto chi desiderasse veder elegantemente disegnata tal construzione, la troverà nella Tav. B del supplemento del Sig. Hachette alla Geometria Descrittiva del Monge.

PROP. LXXXVII. PROBL.

264. *Determinare quel punto, che congiunto con tre altri dati sta una delle congiungenti a ciascuna delle altre due in ragioni date.*

CASO I.

265. Suppongasi primieramente che il punto cercato debba esistere nel piano stesso de' tre dati, B, C, D (*fig.* 82), e sia esso il punto *a*, e congiunte le *a*B, *a*D, *a*C, sia *a*B : *a*D :: *m* : *n*, ed *a*B : *a*C *m* : *r*.

Si divida la BD in E nella ragion data di *m* : *n*, starà BE : ED :: B*a* : *a*D, e quindi la E*a* dovrà dividere per metà l' angolo B*a*D (3. *El.* VI.). Or al punto *a* della E*a* s' intenda costituito l' angolo E*a*F uguale all' altro *a*EF, e quindi a' due EB*a*, E*a*B presi insieme, ossia ad EB*a*, E*a*D: laonde sarà l' angolo D*a*F uguale all' altro EB*a*, e perciò saranno simili i

due triangoli DaF, BaF, e quindi sarà Fa, o FE : aB :: FD : Da; e permutando FE : FD :: aB : aD, cioè :: m : n. Laonde se si prolunghi la ED in F sicchè stia EF : FD :: m : n, il cerchio aEa' descritto col centro F intervallo FE sarà il luogo geometrico di tutti que' punti che congiunti co' due dati B, D danno le congiungenti aB, aD nella costante ragione di m : n.

Similmente se la BC si divida in G, tal che stia BG : GC :: m : r, e che poi la GC si prolunghi in H in modo che la ragione di GH : HC sia uguale alla stessa di m : r, si vedrà che il cerchio Gaa' descritto col centro H, intervallo HG sia il luogo geometrico di tutti quegli altri punti che congiunti co' due B, C danno le congiungenti Ba, aC nella costante ragione di m : r. Laonde il punto cercato in questo primo caso del proposto problema sarà uno di que' due a, a' in cui s' intersegano le suddette due locali, cioè le circonferenze di que' due cerchi.

CASO II.

266. Che se un tal punto debba esister fuori del piano BCD; cioè che debba essere il vertice di una piramide triangolare nella quale sono dati i tre lati della sua base BCD, e gli altri tre che riunisconsi nel vertice serbinsi ragioni date. In tal caso si descriva, come poc' anzi, il cerchio Eaa', ch' è il luogo geometrico di quel punto, nel piano BCD, che congiunto cogli altri due B, D dà Ba : aD :: m : n. È chiaro che se tal cerchio s' intenda rivolgersi intorno al raggio EF prolungato, genererà una superficie sferica che sarà il luogo geometrico di tutti que' punti nello spazio, che congiunti co' due dati B, D danno queste congiungenti nella ragione di m : n. Similmente

delle altre due (180); que' punti ne' quali si taglieranno le projezioni rispettive di queste due intersezioni, rappresenteranno su ciascuno de' piani di projezione le projezioni corrispondenti di que' punti che soddisfano al Problema.

263. *Scol.* In seguito dell' indicazione che qui si è recata della maniera di risolvere il proposto problema, riuscirà facile a chiunque eseguirla graficamente, avvalendosi del metodo proposto nella prop. LXV. per construire l' intersezione di due superficie cilindriche date. Intanto chi desiderasse veder elegantemente disegnata tal construzione, la troverà nella Tav. B del supplemento del Sig. Hachette alla Geometria Descrittiva del Monge.

PROP. LXXXVII. PROBL.

264. *Determinare quel punto, che congiunto con tre altri dati sta una delle congiungenti a ciascuna delle altre due in ragioni date.*

CASO I.

265. Suppongasi primieramente che il punto cercato debba esistere nel piano stesso de' tre dati, B, C, D (*fig.* 82), e sia esso il punto *a*; e congiunte le *a*B, *a*D, *a*C, sia *a*B : *a*D :: *m* : *n*; ed *a*B : *a*C :: *m* : *r*.

Si divida la BD in E nella ragion data di *m* : *n*, sarà BE : ED :: B*a* : *a*D, e quindi la E*a* dovrà dividere per metà l' angolo B*a*D (3. *El.* VI.). Or al punto *a* della E*a* s' intenda costituito l' angolo E*a*F uguale all' altro *a*EF, e quindi a' due EB*a*, E*a*B presi insieme, ossia ad EB*a*, E*a*D: laonde sarà l' angolo D*a*F uguale all' altro EB*a*, e perciò saranno simili i

due triangoli DaF, BaF, e quindi sarà Fa, o FE : aB :: FD : Da; e permutando FE : FD :: aB : aD, cioè :: m : n. Laonde se si prolunghi la ED in F sicchè stia EF : FD :: m : n, il cerchio aEa' descritto col centro F intervallo FE sarà il luogo geometrico di tutti que' punti che congiunti co' due dati B, D danno le congiungenti aB, aD nella costante ragione di m : n.

Similmente se la BC si divida in G, tal che stia BG : GC :: m : r, e che poi la GC si prolunghi in H in modo che la ragione di GH : HC sia uguale alla stessa di m : r, si vedrà che il cerchio Gaa' descritto col centro H intervallo HG sia il luogo geometrico di tutti quegli altri punti che congiunti co' due B, C danno le congiungenti Ba, aC nella costante ragione di m : r. Laonde il punto cercato in questo primo caso del proposto problema sarà uno di que' due a, a' in cui s' intersegano le suddette due locali, cioè le circonferenze di que' due cerchi.

CASO II.

266. Che se un tal punto debba esister fuori del piano BCD, cioè che debba essere il vertice di una piramide triangolare nella quale sono dati i tre lati della sua base BCD, e gli altri tre che riunisconsi nel vertice serbinsi ragioni date. In tal caso si descriva, come poc' anzi, il cerchio Eaa', ch' è il luogo geometrico di quel punto, nel piano BCD, che congiunto cogli altri due B, D dà Ba : aD :: m : n. È chiaro che se tal cerchio s' intenda rivolgersi intorno al raggio EF prolungato, genererà una superficie sferica che sarà il luogo geometrico di tutti que' punti nello spazio, che congiunti co' due dati B, D danno queste congiungenti nella ragione di m : n. Similmente

se si esibisca l'altro cerchio Gaa', ch' è il luogo geometrico di que' punti, nel piano BCD, che congiunti cogli altri dati B, C, danno le Ba, aC nella costante ragione di $m : r$, e che poi un tal cerchio s'intenda rivolgersi intorno al raggio GH prolungato, la superficie sferica che da esso si verrà a generare sarà il luogo geometrico di que' punti nello spazio, ciascun de' quali unendosi co' punti dati B, C, queste congiungenti sono tra loro come $m : r$.

Finalmente se si determini quell' altro cerchio ch' è la locale di tutt' i punti nel piano BCD, ciascun de' quali congiungendosi con punti dati C, D queste congiungenti sono sempre tra loro nella costante ragione di $r : n$, la superficie sferica che da tal cerchio si descrive sarà il luogo geometrico di que' punti dello spazio che hanno la stessa poc' anzi detta condizione. Adunque il punto cercato, cioè il vertice della piramide proposta, dovrà consistere nell' intersezione di queste tre superficie sferiche; ed esso si otterrà facilmente ed in una maniera geometrica nel seguente modo, cioè. Descritti i tre suddetti cerchi, si uniscano i punti ov' essi scambievolmente s' intersegano l' un coll' altro, e dal punto ove tali congiungenti s' intersegano (167) si elevi al piano de' tre punti dati B, C, D, cioè della base della piramide proposta, una perpendicolare, la quale sia uguale alla media proporzionale tra le parti di una stessa di quelle congiungenti; l' altro estremo di questa sarà il punto cercato (169).

267. *Scol.* Le soluzioni recate a' due casi del precedente Problema possono servire anche di rischiaramento e di comprova a quanto fu generalmente detto nel n. 252.

PROP. LXXXVIII. PROBL.

268. *Determinare il vertice di una piramide triangolare, dati i lati della sua base, e gli angoli compresi dalla sua altezza co' lati dell' angolo verticale.*

Dal punto *a* (*fig.* 83) ove l' altezza della proposta piramide supponesi incontrar la base, s' intendano tirate a' vertici degli angoli B, C, D di questa le rette *a*B, *a*C, *a*D; saran dati di specie i triangoli B*a*A, C*a*A, D*a*A, come quelli che, oltre all' angolo retto, hanno un' angolo dato; quindi sarà data la ragione che ciascuna di esse tre rette serba alla *a*A stessa; e per conseguenza quella di una di esse all' altra.

Se dunque s' inclinino da' punti dati B, C, D tre rette che convenghino in uno stesso punto *a*, e sieno in ragion data, si avrà così il punto *a*, cioè il punto ove l' altezza della piramide proposta incontra la base 265); e ritrovando in ordine a' termini della ragione, che una delle tre rette B*a*, C*a*, D*a*, la B*a*, per esempio, serba alla *a*A, ed alla stessa B*a* una quarta proporzionale, sarà questa l' altezza A*a*. Si è dunque determinato il sito del vertice della piramide proposta (*p.* IX.).

E potrebbesi anche esibire l' altezza di tal piramide nel seguente altro modo, cioè. Determinato come poc' anzi il punto *a* (*fig.* 80), ch' è la projezione del vertice di essa sul piano della base, che prendasi per un di quelli di projezione, si abbassi da *a* sulla LM la perpendicolare indefinita *a*A'*a*', e preso sulla stessa LM dal punto A', la A'B' uguale alla B*a*, si constituisca al punto B' della B'A' l' angolo A'B'*a*' uguale al dato *a*BA, nella *fig.*83., il quale è complemento dell' angolo BA*a*;

il punto a' sarà l' altra projezione del vertice della piramide proposta, e la retta Aa' dinoterà l' altezza di essa.

PROP. LXXXIX. PROBL.

269. *Dati in una piramide triangolare i lati della base ed i tre angoli al vertice suo; construire un tal vertice.*

Descrivansi su i tre lati BC, CD, BD (*fig.* 84) della base della piramide proposta le tre porzioni di cerchio BGC, CED, BFD le quali sieno capaci di contenere ciascuna rispettivamente uno degli angoli dati, che in essa piramide era l' opposto ad un tal lato della base; e poi si concepiscan queste rivolgersi intorno alle loro corde, genereranno così tre superficie curve, le quali saranno, com' è chiaro, le locali del punto cercato.

Se dunque, presa la base BCD della piramide per piano di projezione orizzontale, si construiscano su di essa le projezioni delle intersezioni di una delle tre superficie curve colle altre due, ciascuna delle intersezioni di queste due curve rappresenterà la projezione orizzontale del vertice della piramide proposta. E construendo la projezione verticale dell' intersezione di due di esse superficie; gl' incontri di una tal curva colla perpendicolare alla comune sezione de' piani di projezione abbassatale dalla projezione orizzontale del vertice, già determinata, dinoterà la projezione verticale dello stesso.

270. *Scol.* 1. L' esecuzione grafica della construzione indicata nel precedente Problema potrà vedersi eseguita, con eleganza di disegno, nella poc' anzi citata opera del Sig. Hachette.

Scol. II.

271. Il presente Scol. è destinato ad esporre due altre soluzioni dello stesso problema precedente, l'una analitica, che servirà a mostrarci di qual grado esso sia, e l'altra meccanica.

Soluzione analitica del Probl. precedente.

272. S'indichino le AB, AC, AD (*fig.* 83) con x, y, z, e le BC, CD, DB con a, b, c; sarà il triangolo

$$BAC = \frac{1}{4}\sqrt{(4a^2x^2 - (a^2 - y^2 + x^2)^2)}$$
$$ACD = \frac{1}{4}\sqrt{(4b^2y^2 - (b^2 - z^2 + y^2)^2)}$$
$$ADB = \frac{1}{4}\sqrt{(4c^2x^2 - (c^2 - z^2 + x^2)^2)}$$

Or deve stare, per esser dato l'angolo in A in ciascuno di questi triangoli, il rettangolo de' lati intorno ad un tal angolo all'aja corrispondente in data ragione. Dunque sarà pel triangolo BAC

$$xy : \frac{1}{4}\sqrt{(4a^2x^2 - (a^2 - y^2 + x^2)^2)}$$

in data ragione; e quindi anche in ragion data starà

$$4x^2y^2 : 4a^2x^2 - (a^2 - y^2 + x^2)^2$$

E se si formi il quadrato di $a^2 - y^2 + x^2$, e si sottragga da $4a^2x^2$, e poi si converta la ragione che ad una tal quantità ne serba $4x^2y^2$, sarà

$$4x^2y^2 : a^4 - 2a^2y^2 + y^4 - 2a^2x^2 + 2x^2y^2 + x^4 :: m^2 : n^2$$

indicando per $m^2 : n^2$ la ragione che si ottiene convertendo la ragione data della precedente analogia. E quindi sarà pure

$$2xy : a^2 - y^2 - x^2 :: m : n, \text{ e perciò}$$

$$a^2 - y^2 - x^2 = \frac{2nxy}{m}$$

Similmente operando per gli altri due triangoli, si troverà

$$b^2 - z^2 - y^2 = \frac{2pzy}{m}$$

$$c^2 - z^2 - x^2 = \frac{2qzx}{m}$$

Laonde l' equazione al problema proposto sarà quella precisamente che risulterà dall' eliminazione di queste tre ultime di secondo grado, e perciò dell' 8° grado, come si dimostra nella teoria delle eliminazioni, e non già di grado 64°, come ha preteso il Signor Monge (*Geomet. Descr.*).

273. L' insigne analista Sig. Lagrange in una sua Memoria sulle piramidi triangolari inserita negli Atti nuovi di Berlino, anno 1773, per le vie dell' analisi moderna, e servendosi del minor numero possibile di principj di Geometria, imprende a risolvere diversi problemi su tali piramidi, ch' egli con ragione si duole che sieno state da Geometri meno considerate di quello che convenivasi ad esse, che sono tra i poliedri in generale quello stesso che i triangoli pe' rettilinei. Or questo valentuomo nel suddetto Opuscolo stabilisce tra le altre cose gli elementi analitici onde pervenire alla soluzione del problema di cui stiamo trattando; e potrebbesi facilmente, continuando il calcolo sulle generali orme da lui segnate, paragonarlo coll' equazione finale che si otterrebbe per la via da noi indicata nel precedente numero.

Intanto dopo le doglianze del Lagrange dovrà riuscir grato a coloro principalmente che coltivano la Geometria, che io mi sia condotto in queste ricerche col metodo degli antichi, risolvendo uno de' problemi su tali piramidi nel *n.°* 170, ed altri cinque di essi

ne' numeri 255, 258, 266, 268, e 269, a' quali aggiugnerò il seguente problema (277), che il Lagrange espone anche tra gli altri della sua suddetta Memoria, e la cui analisi geometrica lo riconduce tra quelli del presente Capitolo, ove principalmente ci occupiamo a risolver que' problemi che han bisogno de' luoghi alla superficie.

274. Or che il Problema di cui stiamo trattando non possa generalmente ammettere più di otto soluzioni diverse, come il precedente calcolo mostrava, si sarebbe potuto anche rilevare col seguente facilissimo ragionamento geometrico, cioè: Rivolgendosi i segmenti BGC, CED, DFB intorno alle loro rispettive corde, si debbono anche rivolgere i loro supplementi fino al cerchio, cioè gli altri segmenti BgC, CeD, DfB intorno alle stesse corde; vi saranno perciò sei superficie curve descritte dagli uni e dagli altri da ciascuna parte del piano BCD.

Ciò posto s' indichino i segmenti BGC, CED, DFB con P, Q, R, ed i loro rispettivi supplementi con *p*, *q*, *r*; saranno le combinazioni di essi segmenti tre a tre in numero di venti, ed espresse da PQR, QR*p*, PR*q*, PQ*r*, *pqr*, *qr*P, *pr*Q, *pq*R; PQ*p*, PQ*q*, QR*q*, ec., delle quali, essendo impossibili le ultime dodici, non potendosi giammai intersegare le superficie descritte da un arco circolare e dal suo supplemento, se essi rivolgonsi intorno alla loro comune corda; restano le sole prime otto, ch' esprimono otto diversi modi ne' quali possonsi combinare le sei superficie curve suddette per risolvere generalmente il problema proposto.

Soluzione Meccanica del Probl. stesso.

275. Siccome un tal Problema spesso può occorrere in pratica, ove convenga determinare il sito di un punto nello spazio, misurati che si sieno con uno strumento gli angoli, che le visuali da esso condotte a tre altri punti di sito comprendono tra loro; e che a cagione del suo grado non esistono metodi da poterlo geometricamente construire: perciò trattandosi di una construzione da servire in pratica, ne proporrò una congegnata in quel modo che gli antichi solevano tenere, quando la Geometria non valeva a risolvere un qualche Problema, che loro veniva proposto; e 'l qual metodo era da essi tenuto come atto a dar risultati *ad manuum operationes maxime accomodatos, iis, qui Architecti esse volunt* (*). Servirà essa a' Giovani anche per un' esempio di un tal metodo, che potranno utilmente usare in altri casi.

276. Si construisca coll' ajuto di una scala geometrica un triangolo *bcd* (*fig.* 85.) simile a quello che comprendono le rette che uniscono i punti di sito, e construito un' angolo solido A co' tre angoli dati; si vada adattando esso triangolo *bdc* dentro a quell' angolo in modo, che i vertici *b*, *d*, *c* degli angoli suoi corrispondano a que' lati dell' angolo A che sono ad essi rispettivi; è manifesto, che quando si sarà pervenuto a far cadere i punti *b*, *c*, *d* su i lati dell' angolo A, dovranno le A*b*, A*c*, A*d*, che restano in tal modo

(*) Gli antichi Geometri si sono avvaluti di questo metodo nel risolvere in diverse guise il celebre problema delle due medie proporzionali, come si può vedere nel principio del Lib. III. delle Collezioni di Pappo, e ne' comenti di Eutocio al Lib. II. *de Sphaera et Cilindro* di Archimede.

determinate, esprimere in parti della stessa scala i lati della piramide proposta, cioè le tre visuali che dal punto cercato vanno a' tre punti di sito.

Ciò premesso, se dal vertice A si abbassino sulle basi *bc*, *dc* de' due triangoli dati *b*A*c*, *c*A*d* le perpendicolari A*e*, A*f*, e poi da' punti *e*, *f* si elevino sulle stesse, nel piano *bcd*, le perpendicolari *ea*, *fa*; congiunta la A*a*, sarà questa, come facilmente si comprende, l'altezza della piramide A*bdc* determinata di grandezza e di sito, dalla quale sarà facile il ricavare, per mezzo della scala stabilita, la grandezza e 'l sito di quella della piramide proposta, cioè la posizione del punto cercato.

PROP. XC. PROBL.

277. *Dividere una piramide triangolare in quattro altre piramidi triangolari le quali abbiano per basi le facce delle piramide data, e per vertice uno stesso punto dentro di questa, e tali che serbinsi tra loro rispettivamente ragioni date.*

Analisi geometrica.

Sia *a* (*fig*.83) quel punto dentro la piramide triangolare data BCDA, per lo quale conducendosi de' piani che passino anche pe' lati BC, CD, DB, DA, AC, AB di essa, resti tal solido diviso nelle quattro piramidi cercate BCA*a*, CDA*a*, BDA*a*, BCD*a*.

E poichè è data la ragione della piramide BCA*a* all' altra CDA*a*, ch' esprimasi per quella delle rette *m*, *n*; ed è di più data la ragione delle loro basi BAC, CAD date, che si dinoti colle rette *r*, *n*; sarà data anche la ragione delle loro altezze, cioè delle perpendicolari abbassate del punto *a* su i piani BAC,

CAD; ed essa verrà espressa, com'è chiaro, da quella di $m : r$.

E similmente si vedrà esser data la ragione di ciascuna di queste perpendicolari alle altre che dal punto stesso a si abbassano sugli altri piani BAD, BCD.
Laonde il proposto problema si sarà ridotto all'altro di rinvenir nella piramide data un punto a dal quale abbassando le perpendicolari sulle facce della piramide data, queste sieno tra loro in ragioni date.

Or dunque dovendo essere le perpendicolari che si abbassano da tal punto su i tre piani BCD, BCA, ACD in ragioni date, il punto donde esse debbon partire dovrà aver per luogo geometrico una retta di sito determinabile pel n. 164. Ma perchè sono anche date le ragioni che serbansi tra loro le perpendicolari che da un punto stesso debbono cadère su i tre piani BCD, CAD, DAB, tal punto deve aver per suo luogo geometrico un'altra retta di sito determinabile pel numero stesso. Adunque il punto soddisfacente al problema proposto sarà quello ove tali due locali s'intersegano: ed esse dovranno necessariamente intersegarsi, perchè ciascuna deve necessariamente cadere in quel piano ch'è il luogo geometrico de' punti donde abbassandosi le perpendicolari su i piani BCD, CAD sono queste in data ragione. Adunque un tal punto si sarà rinvenuto: Ed il problema proposto potrà agevolmente comporsi.

278. *Scol.* La stessa soluzione avrebbe avuto luogo se il problema fosse stato più generalmente enunciato nel seguente modo, cioè

Dati quattro rettilinei in diversi piani, che s' incontrano; determinare quel punto, che preso per vertice di quattro piramidi aventi per basi questi rettilinei, abbiano queste tra loro ragioni date.

PROP. XCI. PROBL.

279. *Tra due rette date ritrovar due medie proporzionali*.

Metodo di Archita.

Sulla maggiore delle due rette date AB (*fig*.86) si descriva il semicerchio AEB, e su di esso s'intenda eretto il semicilindro AEBIKL; poi sulla AB stessa e nel piano del rettangolo LABI si descriva l'altro semicerchio AGB, il qual si concepisca rivolgersi intorno al punto B, restando sempre verticale, e finchè la AB descriva un quarto di cerchio; genererà esso una superficie di rivoluzione, la quale intersegandosi colla superficie del semicilindro produca in questa la curva AOB. Inoltre la minore delle rette date si adatti dal punto B nel semicerchio AEB, e sia la BE; poi dall' estremo E si abbassi sul diametro AB la perpendicolare, EF, ed il triangolo EFB s' intenda rivolgersi intorno al catcto FB per generare un cono, la cui superficie indefinita interseghi quella del semicilindro nella curva ECH, e questa s' interseghi coll' altra AOB nel punto C. Ciò posto si abbassi da C sul piano sottoposto AEB la perpendicolare CD, che dovrà cadere nella superficie cilindrica, ed incontrar perciò la circonferenza del cerchio che n' è base in D; congiunte le BD, BC, saranno queste le due medie proporzionali cercate. Imperocchè la BC incontri in M la circonferenza della base del cono suddetto, e dal punto M sul piano sottoposto AEB si abbassi la perpendicolare MN, la quale dovrà, com' è chiaro, cadere nella BD;

poi si prolunghi la EF in e, finchè Fe sia uguale ad FE, sarà Ee il diametro del cerchio base del cono descritto dal triangolo EFB, ed il punto e verrebbe a cadere nell' altra semicirconferenza del cerchio AEB. Adunque sarà $MN^2 = ENe = DNB$; e perciò se congiungasi la DM il triangolo DMB sarà rettangolo in M. Ma producendo BD in a finchè sia $Ba = BA$, e congiugnendo la aC, è chiaro che il semicerchio verticale descritto su di aB debba passare per C, e perciò essere anche retto l' angolo aCB. Adunque i tre triangoli aCB, DCB, DMB essendo rettangoli, ed avendo di più comune l' angolo CBa, saranno simili: laonde sarà aB, o AB : BC :: BC : BD :: BD : BM, o BE; e perciò le BC, BD saranno le due medie proporzionali cercate.

289. *Scol.* Per la composizione di questo Problema si richiede dunque di construire l' intersezione della superficie del semicilindro con quella del solido di rivoluzione descritto dal semicerchio BGA; e poi l' intersezione della superficie dello stesso semicilindro con quella del cono descritto dal triangolo EFB; dall' intersezione di queste curve ne risulta il punto C, e quindi l' altro D che soddisfano al Problema. Or la prima di queste intersezioni ha evidentemente per projezione sul piano AEB (*fig.* 87) la semicirconferenza AEB, e l' altra projezione di essa sul piano ABIL, preso come piano di projezione verticale, si otterrà facilmente se per lo punto B si conducano in tal semicerchio le infinite corde BD, BE, ec., e poi per ciascuna di esse, la BD, per esempio, si abbassi da D sul diametro AB la perpendicolare Dd, la quale si produca al di sopra nel piano ABIL, finchè la parte prodotta de pareggi l' ordinata che nel punto D corrisponde nel semicerchio descritto sopra aB: l' estremo e di tal perpendicolare sarebbe la projezione verticale, che si cor-

risponderebbe a quel punto della curva ch' è projettato in D sul piano orizzontale. E così di ogn' altro.

Per construir poi l' intersezione della superficie conica con quella del cilindro, cioè per determinare la projezione verticale di questa, giacchè l' orizzontale cade anche nella semicirconferenza ADB: si determinerà la projezione verticale di quel punto di essa, ch' è projettato in D sul piano orizzontale, congiugnendo la BD, ed immaginando condotto per essa un piano verticale; questo intersegherà il cilindro ne' suoi lati che passano per B, D; e del secondo de' quali si avrà la projezione abbassando da D su di AB la perpendicolare indefinita D*dd'*. La superficie conica poi verrà dallo stesso piano intersegata in un suo lato, la cui projezione verticale si otterrà prendendo sulla EF prolungata la F*n'* uguale alla semiordinata che nel punto N, ove la BD interseca la EF, corrisponde nel semicerchio base del cono; sarà B*n'* la projezione verticale di un tal lato del cono; ed il punto *c* ove la retta B*n'* interseca l' altra *dd'* sarà la projezione verticale di quel punto di questa seconda linea d' intersezione il quale aveva per projezione orizzontale il punto D. E così facendo si verrà ad assegnare l' intera projezione verticale FcH di questa. Ed in tal modo la soluzione di Archita verrà ad avere un' effettiva composizione geometrica.

CAP. XV.

DELLE SUPERFICIE PLECTOIDI.

281. *Def.* XVIII. Se una retta si vada movendo nello spazio, radendo una data curva con una legge costante dalla quale però non risulti ch' essa debba passare per un dato punto, o essere costantemente parallela ad una retta di sito, e nè anche che tutti i punti di essa descrivano periferie di cerchi intorno ad un medesimo asse; la superficie che descriverà la chiameremo *Plectoide* cioè *complicata*, e ciò seguendo gli antichi.

282. Tal è per esempio la superficie curva che nel n. 206 si descrive dal raggio del cerchio che muovesi con doppio moto, cioè progressivo lungo l' asse del cilindro, e di rotazione intorno all' asse stesso: e tale è anche l' altra superficie che vien formata dalle infinite tangenti che si conducono alla spirale cilindrica; e che può concepirsi generata da una retta che si muova radendo l' evolvente del cerchio base del cilindro ov' è descritta la spirale, e toccando continuamente questa curva; e perciò formando sempre uno stesso angolo col corrispondente lato di quel cilindro (229).

283. *Scol.* È facile il ravvisare, che per due siti prossimissimi in cui si ritrovi la retta generatrice di una superficie plectoide, non possa mai passarvi un piano.

PROP. XCII. PROBL.

284. *I determinanti del sito di una superficie plectoide sono le due sue tracce su i piani di projezione, e le projezioni di una qualunque altra linea segnata in essa.*

Imperocchè sieno *akb*, *a'k'b'* (*fig.*88) le due tracce di una superficie plectoide, *chd*, *c'h'd'* le projezioni di un'altra linea ch'è in essa; e prendasi in *a'k'b'* un punto qualunque *k'*, col quale, come vertice, s'intenda descritta una superficie conica, che abbia per direttrice del suo lato la curva *akb*; sarà tal superficie conica data di sito (113). Similmente collo stesso vertice *k'*, e prendendo per direttrice quella linea, ch'è projettata in *chd*, *c'h'd'* si concepisca descritta un'altra superficie conica, sarà questa anche data di sito; e ne sarà di più data la traccia sul piano stesso della *akb*, che sia la curva *ekf* (114). Or queste due superficie coniche, avendo lo stesso vertice *k'* si dovranno intersegare in un loro lato, che sarà precisamente quello che passa per lo punto *k* ove intersegansi le loro tracce *akb*, *ekf*; che perciò siffatto lato di esse, che, come si vede, è anche il lato corrispondente della proposta superficie plectoide, sarà dato di sito. E collo stesso artifizio potendosi mano mano assegnare tutti gli altri lati di una tal superficie plectoide, ne segue ch'essa sia anche data di sito.

285. *Scol.* Per comodità della determinazione del precedente teorema, si sono presi per determinanti del sito di una superficie plectoide le sue tracce co' due piani di projezione, ed una qualunque linea segnata in essa; ma ciascuno facilmente da se rileva, che tali

determinanti potevano essere tre curve ad arbitrio segnate in essa, e le quali fossero date per mezzo delle loro projezioni. Inoltre conviene anche avvertire, che que' determinanti generali, cioè convenienti a quest' intera famiglia di superficie curve, possono restar diversamente modificati, il che rende talvolta più comoda la geometrica esibizione, o più facile il concetto di alcune di tali superficie. Ed in fatti, perchè di buon ora ciò cominci ad intendersi, si rifletta, che nella superficie definita al *n.* 206 basta conoscere la sola projezione della spira, perchè sia data la superficie ivi descritta. Imperocchè è noto della genesi sua, che ogni lato di essa deve appoggiarsi costantemente sull' asse del cilindro su cui è segnata la spira, ed esser parallelo alla base di questo, le quali condizioni sono sufficienti a dare il sito di ciascun lato di quella superficie, come ben si vede. Ed è anche chiaro, che dall' esser data la sola projezione della spirale cilindrica, sia anche data quell' altra superficie plectoide, di cui si è detto nel numero 282; poichè ogni lato di essa ha per projezioni le tangenti le projezioni rispettive della spirale in que' punti, che sono le projezioni corrispondenti di quelli ov' essa è toccata da tal lato. E lo stesso si potrebbe anche mostrare di altre superficie plectoidi la natura delle quali siasi specialmente definita.

286. *Scol.* Quelle tre linee nello spazio sulle quali si appoggiano i lati di una superficie plectoide, e che diventano i determinanti di questa allorchè esse sono date per mezzo delle loro projezioni, in appresso le chiameremo *direttrici de' lati*.

PROP. XCIII. TEOR.

287. *Se le tre direttrici de' lati di una superficie plectoide sieno tre rette, per determinanti di una tal superficie si potranno prendere tre de' suoi lati ad arbitrio.*

Sieno AB, CD, EF (*fig.* 89) le tre rette, che rappresentano le direttrici della proposta superficie plectoide, ed *ab*, *cd*, *ef* tre suoi lati ad arbitrio, e di essi il lato *cd* interseghi la direttrice CD in O. Ciò posto si prenda nella AB un qualunque altro punto P pel quale corrisponda su tal superficie il lato XY; esisterà questo lato nel piano PCD, cioè condotto per lo punto P, e per la retta CD. Che se al contrario si supponga preso nella *ab* un qualunque altro punto *p* pel quale si supponga passare la retta *xy* che si appoggi sulle tre altre *ab*, *cd*, *ef* prese come direttrici: egli è chiaro che tal retta esisterà nel piano condotto per lo punto *p*, e per la *dc*. Or questi due piani PCO, e *pc*O debbono necessariamente intersegasi, poichè hanno di comune il punto O. Laonde si dovranno anche intersegare in qualche punto *z* le rette XY, *xy* che sono in essi, e dalle quali essi si concepiscono descriversi. E dimostrando similmente che ogni altro lato della superficie plectoide descritta colle direttrici AB, CD, EF s' interseghi con qualsivoglia altro di quella descritta colle direttrici *ab*, *cd*, *ef*, ne segue che queste due superficie plectoidi abbiano comuni tutti i loro punti, cioè che coincidano; e quindi che in realtà non ne rappresentino che una sola. Adunque tanto sarà il descrivere la superficie plectoide colle direttrici AB, CD, EF, quanto colle altre *ab*,

cd, *ef*; che perciò queste tre rette al pari che le proposte si potranno prendere per determinanti della data superficie plectoide C. B. D.

288. *Cor.* Da ciò si rileva che per ogni punto di una superficie plectoide le cui tre direttrici sieno linee rette vi passano due rette giacenti su di essa, la prima delle quali si appoggia sulle tre direttrici date, e la seconda su tre lati qualunque della stessa superficie.

289. *Scol.* Questa verità, che, come or ora si vedrà, è fondamentale per le ricerche da stabilirsi sulle superficie plectoidi in generale, non è sì intuitiva, come l' hanno creduta i Geometri descrittivi Francesi, da potersi lasciar senza dimostrazione.

PROP. XCIV. PROBL.

290. *Construire una superficie plectoide di cui almeno una delle tre direttrici sia una linea retta perpendicolare ad uno de' piani di projezione.*

Dinoti *a* (*fig.* 90) la projezione orizzontale di quella direttrice rettilinea ch' è perpendicolare al piano orizzontale, e siane A'*a'* la corrispondente projezione verticale. Sieno inoltre *cd*, *c'd'* le projezioni di un' altra delle direttrici della superficie plectoide proposta a construirsi, ed *ef*, *e'f'* quelle della rimanente. Finalmente sia *p* la projezione data di un punto ch' è in essa superficie, del quale si cerca l' altra projezione, ed essa si supponga primieramente esser data su quel piano stesso cui è perpendicolare la direttrice rettilinea della superficie proposta, cioè sia l' orizzontale. È chiaro, che quel lato della superficie proposta, il quale passa per un tal punto debba esistere in un piano verticale, la cui

traccia, ed insiem la projezione di tal lato sarà la ap, ed i punti q, r ove questa retta incontrerà le projezioni corrispondenti cd, ef delle altre due direttrici, saranno le projezioni di que' punti ove tali direttrici incontravano quel piano stesso. Laonde se questi punti q, r si projettino in q', r' sul piano di projezione verticale, la $r'q'$ dinoterà la projezione verticale del lato suddetto; che perciò projettandosi il punto p in p' sulla $r'q'$, si sarà soddisfatto al quesito.

Che se la projezione data fosse stato il punto p' (*fig.* 91) sul piano verticale; in tal caso si conduca per p' la lm parallela alla LM, e per essa lm s'intenda passare un piano orrizzontale; intersegherà questo la superficie plectoide data in una linea nella quale dovrà essere allogato il punto proposto. Ciò premesso si conduca per a una qualunque retta aki la quale intersegli la ef in k, e la cd in i; dinoterà una tal retta la projezione orizzontale di un qualunque lato della superficie plectoide data; e projettando i punti k, i in k', i' sulle $e'f'$, $c'd'$ sarà la $k'i'$ la corrispondente projezione verticale del lato stesso. Finalmente il punto n' ove la $k'i'$ intersega la lm dinoterà la projezioue verticale del punto d'incontro di questo lato col piano orizzontale condotto per la lm; ed abbassandosi da n' sulla LM la perpendicolare indefinita $n'N'n'$ l'altro punto n ove questa intersegherà la aki sarà la corrispondente projezione orizzontale del punto stesso, cioè un punto della curva d'intersezione da construirsi. E così continuando a fare si verrà a descrivere per punti la projezione orizzontale di tale intersezione, mentre la corrispondente projezione verticale cade nella lm. Laonde abbassandosi dal punto p' sulla LM la perpendicolare $p'P'$, e prolungandola sino ad incontrare in p la linea ch'esprime sul piano orizzontale la poco fa detta

projezione, sarebbe p la projezione orizzontale del punto da prima proposto. C. B. F.

291. *Cor.* Si vede anche dalla precedente soluzione, in qual modo si possa construire l' intersezione di una superficie plectoide che abbia per sue direttrici tre linee rette, con un piano perpendicolare ad una di queste. E non sarebbe difficile il poter estendere tal soluzione ad un piano che l' intersegasse comunque.

PROP. XCV. TEOR.

292. *Construire una superficie plectoide le cui direttrici sieno tre curve qualunque.*

Per la projezione data si conduca nel piano di essa una qualunque retta, per la quale si concepisca condotto un piano perpendicolare a quello ov' è tal projezione; intersegherà questo la superficie plectoide data in una linea nella quale sarà allogato quel punto di cui n' è data una projezione, e si cerca l' altra.

Or per construire la projezione di una tal linea d' intersezione sull' altro de' piani dati di projezione, bisognerà determinare su questo le projezioni di que' punti in dove i lati della superficie proposta incontrano quel piano di sito; la linea condotta per queste projezioni rappresenterà la projezione cercata dell' intersezione suddetta. Finalmente abbassandosi dalla projezione data del punto che si supponeva essere nella superficie plectoide una perpendicolare indefinita sulla comune sezione de' piani di projezione; l' incontro di questa colla precedentemente esibita projezione della curva d' intersezione, sarà l' altra projezione di quel punto. Che perciò si sarà soddisfatto al Problema.

293. *Cor.* Dalla soluzione del precedente Proble-

ma si rileva in qual modo si construisca l' intersezione di una superficie plectoide qualunque con un piano di sito perpendicolare ad uno di quelli di projezione. E lo stesso metodo si adoprerebbe se tal piano segante esistesse comunque per rapporto a' piani di projezione.

PROP. XCVI. PROBL.

294. *Dato un punto in una superficie plectoide che abbia per direttrici tre rette date, condurle per esso un piano tangente.*

Le rette AB, CD, EF (*fig.* 89) sieno le tre direttrici date, e dinoti Z il punto dato, pel quale deve condursi un piano tangente la superficie proposta. Si assegnino tre lati qualunque *ab*, *cd*, *ef* di una tal superficie, ed indi si determinino i due lati XY, *zy* di essa che passano per lo punto Z, ed il primo de' quali poggia sulle direttrici date AB, CD, EF, l' altro sulle *ab*, *cd*, *ef*. Il piano tangente cercato sarà quello che vien determinato dalle ZY, Z*y*.

Imperocchè queste due rette esistendo entrambe sulla proposta superficie plectoide (288) ed intersegandosi in Z possono dinotare due sezioni fatte in tal superficie da due piani seganti che passano per lo contatto. Ed esse sono nel tempo stesso le tangenti di tali intersezioni nel punto stesso. Adunque il piano condotto per esse sarà il piano tangente cercato (124).

295. *Scol.* Se si prenda in XY un qualunque altro punto *z* pel quale s' intenda passare quell' altro lato *x'y'* della superficie plectoide data, il qual si appoggia sulle seconde direttrici *ab*, *cd*, *ef*; sarà chiaro che quell' altro piano che passa per le XY, *x'y'* debba toccare in *z* la stessa superficie plectoide. Adunque sarà

vero, che infiniti piani tangenti toccano la superficie plectoide proposta lungo un lato di essa.

Or siccome i lati Zy, xy' sono in diversi piani colla ZY; perciò è chiaro che quel piano che passa per le ZY, Zy debba intersegare tutti gli altri lati come $x'y'$ della superficie plectoide in que' punti ne' quali essi s' incontrano colla retta XY, per la quale passa quel piano. E similmente potrà rilevarsi che un tal piano debba intersegare tutti gli altri lati della superficie plectoide come cd, ab, ec. in que' punti ne' quali essi incontrano la xy. Adunque è chiaro da ciò che quel piano che tocca la superficie plectoide proposta nel punto Z la deve intersegare in tutto il resto del corso delle XY, xy che sono le direttrici di tal piano tangente.

PROP. XCVII. PROBL.

296. *Tirare un piano tangente una qualunque superficie plectoide, per un punto dato in essa.*

Sieno MEN, $M'E'N'$, $M''E''N''$ (*fig.* 92) le tre curve che dirigono il moto della retta mobile la quale genera la superficie plectoide proposta, e Z sia il punto dato in essa. Si construisca quel lato di tal superficie, che passa per lo punto Z, ed esso sia $EE'E''$; poi pe' punti E, E', E'' ove un tal lato incontra le tre direttrici date MEN, $M'E'N'$; $M''E''N''$ si conducano a queste le tangenti ET, $E'T'$, $E''T''$.

Ciò posto si concepisca un' altra superficie plectoide che abbia per direttrici queste tre tangenti; è facile il comprendere che questa e la proposta abbiano di comune l' elemento $EE'E''$ nel quale si toccano; che perciò il piano che tocca l' una in un punto di tal elemento comune, dovrà toccare, nel punto stes-

so., anche l'altra. Adunque la presente ricerca si sarà ridotta all'altra già risoluta nel precedente Problema, cioè a condurre per Z un piano tangente quella superficie plectoide che ha per direttrici le tre rette date ET, E'T', E"T".

297. *Scol.* Si è veduto nel *n.* 295. che la superficie plectoide, la quale ha per direttrici de' suoi lati le tre rette ET, E'T', E"T" può esser toccata da un piano che passa per la EE" negl' infiniti punti di questa retta. Laonde la proposta superficie plectoide generale, cioè quella che ha per direttrici de' suoi lati le tre curve MEN, M'E'N', M"E"N" potrà similmente esser toccata da un piano che passi pel suo lato EE" negl' infiniti punti di tal retta. Or si prendano in questo lato EE" i tre punti E, E', E" ad arbitrio, e si determinino que' tre piani che passano per siffatto lato, e toccano la proposta superficie plectoide, il primo in E l'altro in E', ed il terzo in E"; è chiaro che conducendosi per questi punti in ciascuno di que' piani tangenti una retta, tali rette potranno dinotare le direttrici di una superficie plectoide tangente la proposta nel lato EE'E". E siccome quelle tre rette in que' piani rispettivi possonsi condurre ad arbitrio, così è chiaro che vi saranno infinite superficie plectoidi a direttrici rettilinee, che toccheranno la stessa superficie plectoide generale proposta lungo il suo lato EE'E"; e ciascuna di esse dovendo avere per ogni punto della EE" un piano tangente, che lo sia anche della superficie plectoide generale, ne segue perciò, che a questa gli debbano corrispondere per ogni punto di essa infiniti piani tangenti diversi.

PROP. XCVIII. PROBL.

298. *Data una superficie plectoide, ed un piano che passa per un suo lato determinare quel punto di questo in dove essa è toccata da quel piano.*

Sieno MEN, M'E'N', M''E''N'' (*fig.* 92) le tre direttrici de' lati della proposta superficie plectoide, ed EE'E'' sia quello tra questi pel quale passa il dato piano. Per gli punti E, E', E'' in dove il lato EE'E'' incontra quelle direttrici si conducano ad esse rispettivamente le tangenti ET, E'T'; E''T'', e con queste per direttrici s'intenda descritta l'altra superficie plectoide, che ha di comune colla proposta il lato EE'E'', ed alla quale deve essere anche tangente il piano dato, in quel punto stesso dove tocca la prima. Or un tal piano incontri due lati FF'F'', GG'G'' della superficie plectoide poc'anzi descritta, presi ad arbitrio, ne' punti Y, X, sarà la retta XY anche un lato della seconda delle anzidette superficie plectoidi, prendendo per direttrici di essa i tre suoi lati EE'E'', FF'F'', GG'G''; e perciò il punto Z ove tal retta ZY incontra l'altra EE'E'' dovrà dinotare il punto di contatto del piano proposto colla superficie plectoide, che ha per direttrici le tre rette ET, E'T', E''T'' (294), e quindi colla data (296).

PROP. XCIX. PROBL.

299. *Construire la curva di contatto di una superficie conica, che abbia per vertice un dato punto, con una qualunque superficie plectoide data.*

Per lo punto dato, e per ciascun lato della superficie plectoide proposta si faccia passare un piano,

e si determini il punto dove questo tocca quella superficie (298); la congiungente un tal punto col dato rappresenterà un lato del cono tangente richiesto: che perciò la curva che passerà per tutti i punti di contatto così determinati sarà la curva cercata.

PROP. C. PROBL.

300. *Construire la curva di contatto di una qualunque superficie plectoide data con una superficie cilindrica, la cui generatrice sia parallela ad una data retta.*

Per gli lati della superficie plectoide si facciano passare de' piani paralleli alla retta data (89); questi piani toccheranno tal superficie ciascuno in un punto (297) per lo quale se si conduca una parallela alla stessa retta, questa parallela rappresenterà un lato della richiesta superficie cilindrica. Laonde la curva cercata sarà quella che passa per tutti que' punti di contatto, che si sono in tal modo determinati.

PROP. CI. PROBL.

301. *Condurre per una retta di sito un piano tangente una data superficie plectoide.*

Si construisca quella superficie cilindrica tangente la proposta superficie plectoide, e che ha ciascun suo lato parallelo alla retta data (300); il piano tangente cercato sarà quello che si conduce a questa superficie cilindrica per una tal retta, cioè per un qualunque punto di essa.

O pure si prenda nella retta data un punto ad

arbitrio, e poi si construisca quella superficie conica che ha per vertice un tal punto, e che tocca la proposta superficie plectoide (299). Il piano tangente cercato sarà quello che si condurrà tangente a questa superficie conica, per un qualunque altro punto della retta data.

SCOLIO GENERALE

302. Per completare intorno alle superficie plectoidi quelle ricerche generali, che colla moderna Geometria di sito si possono stabilire, si sarebbero dovuti qui recare quegli altri Problemi ove proponesi a construire l'intersezione di una di esse con una qualunque altra superficie curva. Ma tali altre cose sono di facile comprensione dopo tutto quello che in questo Capitolo, e nel X. fu detto; che perciò si potranno intorno ad esse esercitare i giovani. E non sarebbe anche fuor di proposito, ch'essi s'impegnassero ad indagare le proprietà di taluna di siffatte superficie specialmente definita, e che imprendessero anche ad esaminare in qual modo per essa restino modificate le soluzioni de' problemi che generalmente si sono in questo Capitolo risoluti. Un tale esercizio potrebbe forse ricondurre sulle orme geometriche degli antichi geometri, e supplire in qualche parte al gran materiale che su tale argomento essi ci avevano preparato in quelle loro opere perdute, le quali trattavano di queste tali superficie, con profondità ed estensione, come si rileva delle indicazioni, che ce ne sono pervenute. Del che altrove fu già detto.

CAP. XVI.

Di que' solidi ne' quali la sezione perpendicolare all' asse è un triangolo rettilineo; e specialmente del cono-cuneo di Wallis.

303. Per illustrare alquanto la difficile ed imperfetta teoria delle superficie plectoidi abbozzata nel Capitolo precedente, ho stabilito di occuparmi nel presente de' qui su mentovati solidi; tanto più che dalle ricerche che stabilirò su di essi i giovani potranno trarre materia per utilmente esercitarsi; e che queste daranno anche luogo ad alcune conseguenze degne di essere avvertite.

304. *Def.* Se due linee qualsivogliano CBA, FED (*fig.* 93.) abbiano un comune asse LM, il quale sia la comune sezione de' loro piani normali l' uno all' altro; le congiungenti BE degli estremi di due ordinate corrispondenti ad una stessa ascissa rappresenteranno i lati di uno de' solidi suddetti.

305. *Scol.* Se la linea FED diventi una retta parallela all asse LM (*fig.* 94), e che l'altra CBA sia un semicerchio descritto sull' asse stesso; in questo caso il solido descritto, come poc' anzi, sarà il *Conocuneo* considerato dal Wallis nel Vol.II. delle sue opere, e perciò detto *del Wallis*. E se la linea FED (*fig.* 95) diventasse una retta comunque inclinata all' asse LM; il solido risultante lo diremo *cono-cuneo acuminato*.

PROP. CII. PROBL.

306. *Determinare l' equazione alla superficie di un qualunque solido in cui la sezione perpendicolare all' asse è un triangolo.*

Da un punto P preso in un lato qualunque di un tal solido (*fig.* 93.) si abbassi sul piano di una delle due linee CBA (304) la perpendicolare PL, che cadrà nell' ordinata BG, e sarà parallela all' altra EG

Ciò posto le due linee CBA, FED sieno rapportate, per mezzo delle loro equazioni, allo stesso asse LM, in cui sia K il comune principio delle ascisse; e le coordinate KG, GN, NP al punto P della superficie curva s' indichino con x, y, z, sarà GB $= f(x)$, GE $= F(x)$; e quindi NB $= f(x) - y$. Ma sta BG : GE :: BN : NP; cioè $f(x) : F(x) :: f(x) - y : z$. Adunque l' equazione alla superficiale di un tal solido sarà

$$z \times f(x) = F(x) \times f(x) - y \times f(x).$$

307. *Cor.* Se la direttrice FED (*fig.* 94) sia una linea retta rappresentata dall'equazione $y = c$, e perciò parallela alla LM; e che l' altra direttrice CBA sia un semicerchio del diametro CA $= a$; la precedente equazione generale si cambierà in quest' altra al cono-cuneo di Wallis, cioè

$$(c - z)\sqrt{(ax - x^2)} = cy$$

308. E se la FD (*fig.* 95) sia una qualunque retta che s' inclini alla LM in un angolo dato, il cui seno sia m, ed n il coseno, e che incontri la LM alla distanza FC $= c$, dall' estremo C del diametro del semicerchio CBA base del cono-cuneo acuminato; l'equazione alla superficie di questo solido sarà

$$\left(\frac{m}{n}(c + x) - z\right)\sqrt{(ax - x^2)} = \frac{my}{n}(c + x)$$

che si ridurrà all' altra

$$(mx - nz)\sqrt{(ax - x^2)} = mxy$$

nel caso che il punto ove la FD incontra l' asse LM sia l' estremo C del semicerchio CBA. Ed in simil guisa si potrebbe rilevare l' equazione alla superficie di ciascuno de' due suddetti solidi; se la curva CBA si supponesse essere qualunque altra diversa dal cerchio.

PROP. CIII. TEOR.

309. *Se le direttrici CBA, FED (fig. 96.) de' lati di una delle superficie sopra descritte (304) sieno due curve in cui le ordinate che corrispondono ad uno stesso punto dell' asse serbinsi un rapporto costante; in tal caso siffatta superficie curva diverrà cilindrica.*

Imperciocchè in tal caso gli angoli EBG, GEB, in cui inclinasi un lato qualunque di tal superficie a ciascuno de' piani in dove esistono le direttrici di esso, saranno determinati in grandezza, ed invariabili. Vale a dire ch' essi s' inclineranno all' uno ed all' altro de' suddetti piani sempre nello stesso angolo; e perciò saranno paralleli tra loro. Laonde la superficie curva sopra descritta diverrà in questo caso quella di un cilindro.

310. *Cor.* I. Quindi ogni sezione prodotta in uno de' suddetti solidi da un piano parallelo ad uno di quelli ove trovansi le curve direttrici de' suoi lati, sarà una curva identica ad una parte della direttrice corrispondente.

311. *Cor.* II. È chiaro che allorchè si verifica la condizione del rapporto costante delle ordinate corrispondenti nelle direttrici, queste curve dovranno essere del genere stesso, e della stessa natura.

312. *Cor.* III. Che se le direttrici CBA, FED (*fig.* 97) sieno due rette; la superficie descritta sarà quella di un piano che avrà per tracce queste stesse rette.

313. *Cor.* IV. E se le due direttrici CBA, FED (*fig.* 96) fossero del tutto identiche, sicchè abbattendosi il piano MLFD sull' altro MLCA, esse dovessero coincidere; in tal caso le GA, GE sarebbero uguali; ed uguali anche gli angoli in E, B.

SCOLIO

314. Ciò che si è detto nella Prop. precedente, e ne' suoi corollarj potendosi facilmente estendere al caso più generale in cui l' angolo de' piani delle due direttrici sia obbliquo, se ne potrà perciò dedurre i seguenti due teoremi.

I.

315. *Se nella base di un cilindro qualunque si tiri una retta ad arbitrio, e per questa si faccia passare un piano, che seghi il cilindro; la sezione prodotta dovrà essere una curva dell' ordine stesso, ed aver la stessa natura che quella parte della base del cilindro, che da essa ne troncava la retta tirata.*

Imperciocchè è chiaro, che segandosi l' unghietta cilindrica che in tal modo si ottiene con piani perpendicolari alla retta tirata da principio, le sezioni che da questi si produranno in essa unghietta, sieno tanti triangoli simili tra loro; e quindi que' lati di questi che sono perpendicolari a quella retta, e che perciò rappresentano le ordinate nelle due curve segnate sulla superficie cilindrica, dalla sua base, e dall'

altro piano che si è supposto segarla, saranno tra loro in un rapporto costante. Laonde per ogni ascissa comune x, se l'ordinata ad una di tali curve sarà espressa da $F(x)$, quella all'altra lo dovrà essere da $A \times F(x)$: perciò l'equazione a ciascuna di tali curve dovrà risultare del medesimo grado, e della stessa forma; e quindi esse dovranno appartenersi ad un ordine stesso, ed essere anche della medesima specie.

II.

316. *E se quel piano segante s'inclini a' lati del cilindro in quell' angolo stesso, in cui questi s' inclinavano alla base di un tal solido; la sezione sarà una curva affatto identica a quella parte della base del cilindro che se n' era troncata colla retta tirata in essa.*

317. *Cor.* Ed estendendo queste due verità si potrebbe generalmente dire, che le sezioni prodotte da un piano qualunque nella superficie di un cilindro sieno curve tutte dell' ordine, e della specie stessa, le quali diverranno identiche se que' piani s'inclinino similmente a' lati del cilindro.

PROP. CIV. PROBL.

318. *Se il cono-cuneo di Wallis si seghi con un piano parallelo alla base; determinare la figura della sezione.*

Il piano segante cba (*fig.* 94.) incontri un lato qualunque del cono-cuneo in b, donde si abbassi sul piano del rettangolo la perpendicolare bg, che cadrà nell' intersezione delle ca, EG. Or perchè GB:

gb :: EG : Eg, e quindi GB^2, cioè CGA, o ega : gb^2 :: EG^2 : Eg^2; si vede perciò, che la curva cba sarà un' ellisse, in cui ca rappresenta l' asse maggiore, ed il minore è quanto la quarta proporzionale in ordine a GE, Eg, e ca, o CA.

319. Nell' equazione $(c-z)\sqrt{(ax-x^2)} = cy$ (307) si ponga $z = h$, supponendo che h sia la distanza del piano segante dalla base del cono-cuneo di Wallis; e si avrà per equazione alla curva di sezione la seguente

$$y = \frac{c-h}{c}\sqrt{(ax-x^2)}$$

E facendo $c : c-h :: a : b$, essa diverrà

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(ax-x^2)}$$

ch' è all' ellisse poc' anzi indicata.

320. E se nella stessa equazione generale si fosse posto $y = k$, si sarebbe avuta per la sezione parallela al rettangolo la seguente equazione

$$(c-z)\sqrt{(ax-x^2)} = ck$$

ch' è ad una linea di quart' ordine.

321. *Scol.* Le precedenti considerazioni si potranno facilmente estendere a qualunque de' solidi definiti al *n.* 304., il che potrà servire di esercizio a coloro che coltivano la moderna analisi. Intanto se le direttrici di uno di tali solidi sieno due linee rette, come le rappresenta la figura 98, sicchè un tal solido sia il cono-cuneo acuminato ad ambe le direttrici rettilinee: ritenute le stesse indicazioni del *n.* 306, se sieno p e q il seno e coseno dell' angolo che forma l' altra direttrice CA coll' asse LM; l' equazione a questa darà la GB $= \frac{px}{q}$: e quindi quella del solido si trasmuterà in questo caso nell' altra.

$$\left(\frac{m}{n} (c+x) - z \right) \frac{px}{q} = \frac{my}{n} (c+x)$$

E perciò l'equazione alla sezione parallela al piano delle x, y, alla distanza $z = h$ sarà la seguente

$$\left(\frac{m}{n} (c+x) - h \right) \frac{px}{q} = \frac{my}{n} (c+x)$$

e quella all' altra sezione parallela al piano dell' altra direttrice, ossia al piano delle x, z, alla distanza $y = k$, sarebbe

$$\left(\frac{m}{n} (c+x) - k \right) \frac{px}{q} = \frac{my}{n} (c+x)$$

L' una e l' altra delle quali è, come si vede, ad una sezione conica.

322. E si vede ancora, che supponendo in esse equazioni la $c = o$, sì l' una che l' altra si riduca a rappresentare una linea retta; lo che coincide con ciò che si è detto al *n*. 312.

PROP. CV. PROBL.

323. *Construire l' intersezione di un cono-cuneo di Wallis con un piano parallelo al rettangolo.*

Sia HLK una tal sezione (*fig.* 99). E poichè il piano segante HLK si suppone parallelo al rettangolo CFDA, dovrà esso intersegare un qualunque lato EB del cono-cuneo suddetto, e l' ordinata corrispondente BG nel cerchio che n' è base, in modo che congiunta la LM, sia questa perpendicolare a quel cerchio, e parallela alla EG. Laonde sarà BG : GE :: BM : ML; il che darà la seguente geometrica construzione della suddetta curva d' intersezione.

324. Col centro il punto G, e cogl' intervalli GB, GM descrivansi gli archi circolari B*b*, M*m*; poi

congiungasi la Eb, ed elevata da m la mL' perpendicolare alla LM, si tiri per L' la $L'l$ parallela alla LM, sarà l un punto di tal curva rappresentata sul piano verticale CFDA. E similmente se ne assegneranno gli altri; ond' è ch' essa resterà facilmente descritta sul piano del rettangolo.

PROP. CVI. PROBL.

325. *Construire l' intersezione di un cono-cuneo di Wallis con un piano che passi per una qualsivoglia perpendicolare al diametro della sua base.*

Sia HK (*fig.* 100) una perpendicolare al diametro CA della base del cono-cuneo, e per tal retta passi il piano segante, che produca in questo solido la sezione KNL. Da un punto qualunque N di questa si abbassi sul piano del rettangolo la perpendicolare NM, che cadrà nell' intersezione HL di quel piano segante col rettangolo CADF; e sia inoltre EB quel lato del cono-cuneo che passa per lo punto N, sarà EG : GB :: EM : MN. Laonde si avrà la seguente construzione geometrica di una tal curva.

326. Col centro G, intervallo GB, si descriva l' arco circolare Bb, e si congiunga la Eb; indi si tiri per M la MN' parallela alla CA, e dal punto M stesso si elevi alla HL la perpendicolare Mn uguale alla MN'; sarà questa uguale alla MN, e quindi il punto n rappresenterà uno di quelli della curva da descriversi.

327. *Scol.* 1. La projezione orizzontale di una tal curva d' intersezione può anche facilmente determinarsi: poichè se si prenda sulla GB una parte Gn' ugnale alla Mn, sarà n' la projezione del punto N; e similmente si assegneranno le projezioni orizzontali ri-

spettive degli altri punti di una tal curva, ond' è che si avrà così la projezione di essa nel piano del cerchio ch' è base del cono-cuneo.

328. *Scol.* II. In questa sezione si comprendono tutte quelle altre prodotte nel cono-cuneo di Wallis da un piano perpendicolare al rettangolo, e che un tal geometra ha considerate individualmente, come può vedersi nel suddetto volume delle sue opere.

Si potrebbe inoltre il cono-cuneo FCKAD concepir segato da un piano il quale passi per uno de' lati del rettangolo; il che dà tre sezioni, quella cioè fatta per CA, l' altra per FD, e la terza per AD, o CF, le quali convengono tra loro, e con quella parallela al rettangolo FCAD, nell' avere per loro limite comune il rettangolo suddetto. Ma queste tali ricerche sono facilissime a rilevarsi da chiunque, che perciò per brevità le tralascio.

PROP. CVII. PROBL.

329. *Per un punto dato nella superficie del cono-cuneo di Wallis, condurre ad esso un piano tangente.*

Sia b un tal punto (*fig.* 94), e cba la semiellisse che dinota la sezione prodotta in tal solido da un piano, che passa per quel punto, ed è parallelo alla base di esso; e sia inoltre EbB il lato corrispondente dello stesso solido. Or se per gli punti b, B s' intendano tirate al semicerchio, ed alla semiellisse le tangenti BH, bK, queste e la FD dinoteranno le direttrici di quella retta che genera una superficie plectoide la quale tocca quella del cono-cuneo di Wallis lungo il lato EbB; che perciò si vede, che i due lati di tal super-

ficie plectoide corrispondenti alle due diverse genesi delle quali essa è suscettibile (288), e che passano per lo stesso punto b, sieno per l'appunto le rette EbB, bK. Laonde saranno queste rette i determinanti del piano tangente cercato.

330. *Scol.* Si bissechi la ca in O, ed in ordine ad Og, ed Oc si ritrovi la terza proporzionale OK; intendendosi congiunta la bK, sarebbe questa la tangente dell' ellisse cba nel punto b: quindi la EK dovrà rappresentare la traccia verticale del piano tangente cercato; e perciò prolungandosi questa retta fino alla LM in H, l'altra retta BH sarà la traccia orizzontale corrispondente del piano stesso.

CAP. XVII.

DEL CILINDROIDE.

331. *Def.* Se quella retta che rappresenta la minima distanza di due altre rette date nello spazio, si rivolga circolarmente intorno a quel punto ov' essa incontra una di tali rette presa come asse, trasportando seco l' altra, la quale vi resti immobilmente connessa; si descriverà da questa la superficie di un solido indefinito per due versi, che per la sua forma, e perchè ogni sezione perpendicolare all' asse è un cerchio, come nel cilindro, potrassi convenevolmente chiamare *cilindroide*.

332. *Cor.* 1. Si rileva da tal genesi che il minimo cerchio sia quello che vien descritto dalla minima distanza, e che gli altri vadano mano mano crescendo dall'una, e dall'altra parte, a proporzione che si allontanano dal minimo: che perciò la superficie di questo solido sia come ristretta nel luogo del cerchio descritto dalla minima distanza, donde poi proceda slargandosi sempre dalle due parti in forma di un imbuto.

333. *Cor.* 2. Se l' asse di questo solido si prenda anche come asse di quel cilindro che ha per raggio la minima distanza tra le due rette proposte, è egli chiaro che tal cilindro debba essere inscritto nel cilindroide, ed aver comune con esso solamente quel cerchio descritto dalla minima distanza suddetta; che perciò si vede che la retta generatrice della superficie del cilindroide debba, in qualunque luogo si ritrovi nel giro

ch' essa fa, toccare la superficie di quel cilindro in un punto della circonferenza del cerchio il cui raggio è la minima distanza. Adunque il piano condotto per tal retta, e pel lato corrispondente al punto ov' essa tocca la superficie di quel cilindro, dovrà esser tangente a questo. Ed inoltre la projezione di quella retta sopra un piano perpendicolare all' asse del cilindro dovrà essere tangente la traccia di questo sul piano stesso, cioè quel cerchio descritto su di un tal piano, col centro il punto ov' è incontrato da quell' asse, e col raggio quanto la minima distanza.

334. *Scol.* Il solido che si è qui sopra definito, e che abbiamo chiamato cilindroide; poichè esso è in effetto, come si vedrà tra poco, quello stesso che il Wallis immaginò generarsi dalla rivoluzione dell' iperbole intorno al suo semiasse conjugato; e che chiamò con tal nome, è stato da' moderni Geometri Descrittivi Francesi denominato bizzarramente *Iperboloide de revolution a une nappe*. Nè parmi ch' essi abbiano in alcun luogo fatta avvertire l' identicità del loro solido con quello del Wallis, quantunque il Newton avesse già fatta rilevare nella sua Aritmetica Universale la genesi del cilindroide per una retta, come in appresso mostreremo (*).

PROP. CVIII. TEOR.

335. *I determinanti del sito, e della figura di un cilindroide sono il sito del suo asse, e quello della retta che genera la superficie di esso.*

Dinoti AB (*fig.* 101) l' asse dato, e CD la retta generatrice della superficie di un cilindroide; e l' uno

(1) Newton *Aritmetica Universalis* Prop. XXXIII.

e l' altra incontrino un piano perpendicolare alla AB in B, C; sarà dato il cerchio descritto col raggio BC, ch' è quello descritto su tal piano dall' estremo C della DC nel suo moto: e sarà anche data la minima distanza AD delle AB, DC (100).

Inoltre col centro B, e col raggio uguale ad AD si descriva il cerchio EFG, che sarà la base del cilindro inscritto nel cilindroide, e dal punto D si abbassi sul piano KHC la perpendicolare DE, che sarà il lato del suddetto cilindro nel punto D ov' è toccato dal lato corrispondente CD del cilindroide: che perciò sarà dato il punto E, quindi la BE, e finalmente l' angolo EBC. E volendo un qualunque altro lato di questo solido; quello, per esempio, che incontra il cerchio KHC in H; si unisca la BH; poi costituiscasi al punto B della BH l' angolo HBL uguale al dato CBE, e per lo punto L si tiri il lato corrispondente del cilindro, cioè LM uguale ad ED; congiunta la HM, sarà questa, com' è facile a comprendersi, il lato che si cerca. E così di ogn' altro.

Laonde potendosi assegnare geometricamente il sito di ciascun lato del cilindroide proposto, sarà perciò dato il sito della superficie di esso; ed i determinanti di questa saranno quelli che si sono sopra enunciati, ed i quali, come si è veduto, sono bastanti a stabilire il sito di que' lati.

PROP. CIX. TEOR.

336. *Ad ogni cilindroide, per ogni punto del minimo cerchio, gli corrispondono due lati, i quali sono due generatrici diverse della superficie di un tal solido.*

Rappresenti anche come nel Teor. precedente AB

l' asse (*fig.* 102), DC la generatrice della superficie di un cilindroide, ed AD la minima distanza tra le AB, DC; la quale sia projettata in BH sul piano del cerchio CH*c*. Al punto B della BH si costituisca l'angolo HB*c* uguale al dato HBC, e si unisca la D*c*. Finalmente congiungansi le A*c*, AC.

È chiaro primieramente che sieno uguali tra loro le DC, D*c*, come anche le AC, A*c*; che perciò ne' triangoli ADC, AD*c* dovranno pareggiarsi gli angoli ADC, AD*c*, e quindi questo secondo sarà retto al pari che il primo. Adunque la AD rappresenta anche la minima distanza tra le due altre rette AB, D*c*.

Or il punto D sia projettato in *d*, e quindi sia D*d* il lato del cilindro inscritto nel cilindroide generato dalla retta FDC; e si prenda in AB un qualsivoglia punto B', per lo quale si concepisca condotto un piano parallelo a quello del cerchio CH*c*; e quindi anche perpendicolare alla AB: un tal piano intersegherà gli altri D*d*C, D*dc* nelle rette D' C', D'*c*' parallele respettivamente alle *d*C, *dc*; che perciò saranno uguali tra loro non meno le DC', D*c*', che le D'C', D'*c*', e congiunta la B'D', gli angoli B'D'C', B'D'*c*' saranno uguali tra loro del pari che gli altri B*d*C, B*dc*, che gli pareggiano respettivamente (10.*El. XI.*). Adunque dovranno anche esser tra loro uguali le B'C', B'*c*', e quindi i punti C', *c*' esistenti nelle due rette diverse DC, D'*c*' da ciascuna delle quali si genera, rivolgendosi come sta detto nella definizione (301), la superficie di un cilindroide, descriveranno in tal genesi una medesima circonferenza di cerchio; e così sempre dimostrandosi per tutti quegli altri punti delle rette FDC, *f*D*c*, i quali sono equidistanti da D, ne segue che le due rette diverse FDC, *f*D*c* descrivono una stessa superficie di cilindroide; che perciò questa potrà esser

generata da due rette diverse, le quali s' intersegano in un punto del minimo cerchio. C. B. D.

337. *Cor.* Dalla precedente dimostrazione si rileva, che tali due generatrici s' inclinano similmente a quel lato del cilindro che passa per lo punto del minimo cerchio ov' esse s' intersegano; e di più che la projezione di quel raggio di questo che passa per al punto, sopra un piano qualunque perpendicolare all'asse, bisseca l' angolo compreso dalle congiungenti il punto ove tal piano incontra l' asse, con quelli ov' è incontrato dalle suddette due generatrici del cilindroide. E ciò è necessario a sapersi, affinchè data una delle due generatrici, si possa determinar l' altra.

LEMMA

338. *Se a parti opposte del punto M (fig. 103), ch' è un estremo della minima distanza ML tra le due rette AB, CD si prendano le parti uguali ME, Me, e da' punti E, e si abbassino sull' altra retta AB le perpendicolari EF, ef; queste dovranno essere uguali tra loro; come anche le FL, fL.*

Imperocchè si concepiscano rivolgersi circolarmente, e nel medesimo tempo, le MD, LB intorno a' punti M, L: è chiaro che quando la MD coinciderà colla MC, la LB dovrà coincidere colla LA; e quindi coincidendo il punto e con E, dovrà la *ef* cadere sulla EF, e 'l punto *f* in F. Adunque saranno uguali tra loro non meno le LF, L*f*, che le FE, *fe*. C. B. D.

PROP. CX. TEOR.

339. *La generatrice della superficie di un cilindroide descrive al di sopra, ed al di sotto del suo punto di minima distanza dall' asse due parti di superficie identiche tra loro.*

Imperocchè sia, come nel Lemma precedente, M quel punto ove la minima distanza dall' asse incontra la generatrice DC della superficie di un cilindroide; e presi dalle due parti di questo punto M, sulla CD, le ME, M*e* uguali tra loro, saranno uguali le perpendicolari EF, *ef*, che da' punti E, *e* si abbassano sull' asse AB, e quindi i cerchi che nel generarsi la superficie del cilindroide si descrivono da queste rette: che perciò è chiaro, che le due parti della superficie di tal solido l' una descritta dalla MD, e l' altra dalla MC sieno identiche tra loro.

PROP. CXI. TEOR.

340. *Se un cilindroide si seghi con un piano per l' asse, ciascuna curva prodotta nella sua superficie avrà due parti simili, che si riuniranno in un punto della circonferenza del minimo cerchio.*

Imperocchè siccome tutt' i cerchi equidistanti dal minimo sono uguali tra loro, è chiaro perciò che que' due rami di curva che rappresentano l' intersezione suddetta, a contar dal punto ove il piano segante incontra la circonferenza del minimo cerchio, sieno tali, che ad uguali ascisse computate sull' asse, dal punto dov' è incontrato dalla minima distanza, vi corrispondono uguali ordinate; che perciò tali due rami dovranno essere tra loro identici. C. B. D.

341. *Scol.* Per lo centro del cerchio minimo s'intenda condotta una parallela alla retta generatrice della superficie del cilindroide, e questa poi rivolgersi intorno all' asse serbandovi sempre la stessa inclinazione; descriverà una superficie conica, che, come si rileva chiaramente, non dovrà mai incontrare quella del cilindroide; che perciò sarà assiutotica della superficie di questo solido. Ed il piano condotto per l'asse del cilindroide segherà questa superficie conica in due rette, che saranno gli assintoti delle due curve in cui il piano stesso segante incontra quest' ultima superficie.

PROP. CXII. PROBL.

342. *Determinare la figura della sezione prodotta in un cilindroide da un piano che lo sega comunque.*

Sia IQK (*fig.* 104) la sezione prodotta in un cilindroide da un piano, e questo sia segato da quel piano per l' asse che gli è perpendicolare, dovrà la comune sezione di siffatti due piani dividere quella sezione IQK nelle due parti identiche KQO, IQO; e l' angolo CHQ sarà quello in cui l' asse del cilindroide inclinasi al piano segante. Inoltre sia CD la minima distanza tra un tal asse, e la generatrice XY della superficie del cilindroide, e questa in qualunque luogo del suo giro incontri in un punto L il perimetro della sezione IQK. Ciò premesso si tiri per D la retta DF parallela all' asse AB, e poi per le AC, CD s' intenda passare un piano; dinoterà LDF l' angolo in cui s' inclina ad un tal piano la retta XLY. Dopo ciò dal punto L si abbassino sulle rette DF, AB, OQ le perpendicolari LF, LG, LM, e congiungansi le FG, MG; sarà il piano LGF perpendicolare all' altro GFDC, la figura del quale è un rettangolo. Quindi l' angolo DLF rappresenterà

l' inclinazione della retta XY al piano FLG, o a qualunque altro piano perpendicolare all' asse AB del cilindroide proposto.

Or pongasi $CD = FG = a$
$CH = c$
$HM = x$
$ML = y$.

Ed essendo dato di specie il triangolo GHM, sarà data la ragione di MH : HG, ch' esprimasi per $p : a$, e sarà $HG = \frac{ax}{p}$, e quindi $CG = c + \frac{ax}{p}$. E per la stessa ragione, chiamando $q : a$ la ragione di FD : FL, nell'altro triangolo FDL anche dato di specie, sarà $q : a$ :: FD, o GC : FL, cioè :: $c + \frac{ax}{p}$: $\frac{ac}{q} + \frac{a^2x}{pq} = FL$. E perciò essendo $GL^2 = FG^2 + FL^2$, sarà $GL^2 = a^2 + \frac{a^2c^2}{q^2} + \frac{2a^3cx}{pq^2} + \frac{a^4x^2}{p^2q^2}$. Adunque sarà $GL^2 - MG^2$, cioè ML^2 o sia

$$y^2 = \frac{a^2q^2 + a^2c^2}{q^2} + \frac{2a^3c}{pq^2}\,x + \frac{a^4 - p^2q^2 + a^2q^2}{p^2q^2}\,xx$$

Nella quale equazione le due indeterminate x, y non oltrepassando il secondo grado, apparisce chiaramente, che la curva d' intersezione proposta sia una sezione conica. E si rileverà facilmente, che se l' angolo MHG sia maggiore dell' altro LDF, in un tal caso risulterà negativo il valore del coefficiente della x^2, e quindi tal curva sarà un' ellisse; che se al contrario quel primo angolo sia minore di questo secondo, il suddetto coefficiente sarà positivo, e quindi un' iperbole la curva d' intersezione. Finalmente supponendosi uguali tali angoli, quel coefficiente diverrà zero, e quindi la curva d' intersezione sarà una parabola, o anche un parallelogrammo, se i punti C, ed H coincidano.

343. *Scol.* Nel secondo de' casi suddetti si comprende quello in cui si suppone svanire l' angolo GHM, ossia che il piano segante passi per l' asse del cilindroide; ed in questo caso la curva d' intersezione sarà un' iperbole rappresentata dall' equazione $y^2 = a^2 + \frac{a^2}{q^2} x^2$, o pure $y^2 = \frac{a^2}{q^2} (q^2 + x^2)$; ove a rappresenta il semiasse primario, e q il secondario, per rispetto al quale si trova rilevata una tale equazione.

Or sieno REP, *rep* (*fig.* 105) le due iperboli opposte dell' equazione suddetta, nelle quali un cilindroide è intersegato da un piano condotto pel suo asse BA, e sieno S*s*, T*t* le due rette in cui un tal piano interseca la superficie assintotica di quella del cilindroide, e perciò gli assintoti di quelle iperboli (341). Dal punto E si elevi la E*c* perpendicolare alla CE, sarà questa quanto il semiasse secondario delle due iperboli. E siccome l' assintoto S*s* deve esser parallelo alla generatrice del cilindroide in un dato sito; sicchè tali due rette si dovranno inclinare al piano del circolo descritto dalla CE in uno stesso angolo, che sarà quanto *c*CE; perciò un tal angolo sarà quello in cui inclinasi costantemente la generatrice del cilindroide al piano del suddetto cerchio. Laondè dovendo stare il semiasse primario dell' iperbole REP al suo secondario, cioè $a : q$ :: CE : E*c*, sarà quello a questo, come il raggio alla tangente dell' angolo in cui la generatrice del cilindroide inclinasi ad un piano perpendicolare al suo asse: che perciò potrassi agevolmente descrivere in un piano quell' iperbole, dalla cui rivoluzione intorno all' asse secondario si genera quel cilindroide, che si era esibito co' determinanti espressi nel *n.* 331.

344. *Cor.* Adunque il cilindroide definito al *n.* 331 può concepirsi anche generato da una determinata iperbole la quale si rivolga intorno al suo asse secondario; ed esso è perciò precisamente quel solido che con tal nome fu considerato dal Wallis, e che i Geometri moderni chiamano *cilindroide di Wallis*; il che fu anche accennato al *n.* 334.

PROP. CXIII. PROBL.

345. *Construire la superficie di un cilindroide il cui asse sia perpendicolare ad uno de' piani di projezione.*

Sia o (*fig.* 106) la projezione dell'asse sul piano cui è perpendicolare, ed O'a' la corrispondente sull' altro piano di projezione perpendicolare al primo; sieno inoltre *ab*, e B'a' le projezioni della retta generatrice di esso, ed il cerchio *acd* sia la projezione orizzontale del cerchio descritto dalla minima distanza della generatrice dall'asse, e di questo stesso cerchio ne dinoti la corrispondente projezione verticale la retta *c'a'd'* parallela alla LM, ed uguale alla *cd*, cioè quanto il doppio della minima distanza suddetta. Ciò premesso

346. *Cas.* 1. Sia *n* la projezione data di un punto della superficie del cilindroide proposto sul piano cui è perpendicolare l' asse di esso, e si cerchi la corrispondente sull' altro de' piani di projezione.

Si determini il punto *b* ove la generatrice di una tal superficie incontra il piano orizzontale, e col centro *o*, intervallo *ob* si descriva il cerchio *bef*, che sarà quello che si descriverebbe nel piano orizzontale dalla generatrice suddetta, nel suo intero giro; indi per lo punto *n* si conduca al cerchio *acd* la tangente

utv, che lo tocchi nel punto *t*, il qual si projetti sulla *cd* in *t'*: è chiaro, che il piano verticale condotto per la *utv* dovrà passare per quel punto della superficie del cilindroide, che ha per projezione orizzontale *n*, ed intersegarla in due suoi lati, i quali s' intersegano in quel punto del minimo cerchio che ha per projezioni le *t*, *t'*, ed incontrano il piano orizzontale ne' punti *u*, *v* della circonferenza *bef*. Laonde projettandosi i punti *u*, *v* in U', V' sul piano verticale, e congiunte le U'*t'*, V'*t'*, saranno queste le rispettive projezioni verticali di tali lati; che perciò in ciascuna di esse dovrà cadere la projezione verticale del punto *n*. Adunque queste projezioni verticali saranno due diverse rappresentate da' punti *n'*, *n''* ne' quali le U'*t'*, V'*t'* sono intersegate dalla perpendicolare indefinita abbassata da *n* sulla LM.

347. *Cas.* 2. Che se al contrario la projezione data del punto da construirsi esistesse sul piano di projezione verticale, e fosse, per esempio, il punto *n'*. Si concepisca condotto per questo un piano orizzontale, che sarà dato per mezzo della sua traccia verticale, ch' è la parallela *lm'* condotta per *n'* alla LM; si determini il punto d' incontro di questo piano colla generatrice data della superficie del cilindroide (75); e sia *g'* la projezione verticale di tal punto d' incontro, e *g* l' orizzontale: col centro o, intervallo *og* si descriva il cerchio *gnp*, che sarà la projezione orizzontale di quello in cui il piano condotto per la *lm'* intersegava il cilindroide, e nella periferia del quale doveva trovarsi allogato il punto projettato in *n'*. Laonde se dal punto *n'* si abbassi sulla LM la perpendicolare indefinita *n'*N*nn*, ciascuno de' due punti *n* in dove questa intersegherà la circonferenza *gnp* sarà la projezione orizzontale corrispondente di ciascuno di que' due pun-

27

ti ne' quali la perpendicolare condotta per n' al piano verticale incontrava la superficie del cilindroide.

348. *Scol.* 1. Oltre alla tangente *untv* può anche per lo punto *n* condursi al cerchio stesso *acd* l'altra tangente *rnsq*: e se per questa s' intenda pure condotto un piano verticale, dovrà anch' esso intersegare la superficie del cilindroide in due suoi lati, i quali s' incontreranno in quel punto della circonferenza del minimo cerchio ch' è projettato in s, s', ed avranno per loro projezioni verticali rispettive le $Q's'$, $R's'$. Or questo piano, e quello condotto per l' altra tangente *untv* (*cas.* 1.) s' intersegano nella verticale condotta per *n*: ed è poi chiaro che que' due lati della superficie del cilindroide, i quali incontrano il piano orizzontale in *r*, *u*, e che hanno per projezioni verticali rispettive le $R's'$, $V't'$, debbono incontrarsi in uno stesso punto di tal perpendicolare; e che similmente in uno stesso altro punto di questa debbono intersegarsi quegli altri due lati, i quali incontrano quel piano di projezione in *q*, *v*, e che sono projettati in $Q's'$, $V't'$ sul piano di projezione verticale. Adunque è chiaro dal già detto che le $R's'$, $Q's'$ debbano intersegarsi colla $nN'n'n''$ ne' medesimi punti n', n'' ne' quali questa s' intersegava colle $U't'$, $V't'$: la qual cosa si rilevava anche direttamente dal vedere, che la verticale condotta per *n* non può incontrare la superficie del cilindroide che in due punti solamente. E da ciò ne risulta, che sia indifferente il condurre al cerchio *acd* l' una o l' altra delle tangenti *untv*, *rnsq*, per la risoluzione del primo caso del problema precedente.

349. *Scol.* 2. È facile poi a rilevarsi che la $n'n''$ debba esser divisa ugualmente dalla $c'd'$, cioè che i due punti della superficie del cilindroide projettati in *n* debbano trovarsi ad uguali distanze dal piano del minimo cerchio, uno al di sotto, e l' altro al di sopra

di esso. Dal che si deduce eziandio chiaramente, che, per le projezioni verticali n', n'' de' punti della superficie del cilindroide, vi corrispondano le stesse projezioni orizzontali n, n.

PROP. CXIV. PROBL.

350. *Per un punto dato sulla superficie di un cilindroide tirare un piano che la tocchi.*

Poichè per lo punto dato sulla superficie del cilindroide vi debbono passare due lati corrispondenti alla doppia genesi di cui è suscettibile tal superficie (336), si assegni perciò la projezione orizzontale di ciascuno di questi; il che si ottiene facilmente, tirando per lo punto n (*fig.* 106), ch' è la projezione orizzontale del punto dato, le due tangenti utv, rsq al cerchio cad, ch' è la projezione orizzontale del cerchio descritto sulla superficie del cilindroide dalla minima distanza tra la generatrice di essa ed il suo asse: i punti u, r saranno quelli dove que' lati incontreranno il piano orizzontale.

Or siccome tali lati rappresentano due qualunque sezioni prodotte nella superficie del cilindroide da due piani che passano pel punto di contatto proposto, e ch' esse rette sono nel tempo stesso le tangenti di queste sezioni in quel punto; perciò il piano che passa per esse sarà il piano tangente cercato (124). Dunque la traccia orizzontale di un tal piano tangente sarà la retta ur, e la verticale si potrà determinare per mezzo della Prop. xx. (63).

Che se la projezione verticale del punto di contatto dato corrispondente alla stessa projezione orizzontale n, fosse stata l' altro punto n'' nel quale confluiscono le projezioni verticali di quegli altri due lati della superficie del cilindroide, i quali hanno per pro-

jezioni verticali le Q'n'', V'n''; in tal caso, come si vede, la traccia orizzontale del piano tangente sarebbe stata la *qv*.

351. *Cor.* 1. Congiungasi la *on*, dovrà questa esser perpendicolare alle *ur*, *qv*; che perciò il piano tangente il cilindroide in un punto dato nella sua superficie dovrà risultar perpendicolare a quel piano che passa per l' asse, e pel punto di contatto, e passar quindi per la tangente del cerchio orizzontale, che corrisponde, nella superficie del cilindroide, al piano suddetto.

352. *Cor.* 2. E da ciò si rileva, che ogni piano il quale passa per un qualsivoglia lato di un cilindroide, dovrà toccare questo solido in quel punto nel quale un tal lato incontra quel piano per l' asse, ch' è perpendicolare al piano proposto.

353. *Scol.* Dalla soluzione del precedente problema potrà rilevarsi in qual modo la nuova genesi, che al cilindroide Wallisiano si è assegnata nella definizione di esso (331) faciliti, e renda più elegante la construzione del problema di tirarli un piano tangente.

LEMMA

354. *Se l' asse di una sezione conica sia perpendicolare alla retta nella quale il piano in cui essa esiste intersega un altro piano; la projezione di quella curva su questo piano sarà un' altra sezione conica della specie stessa, il cui parametro starà a quello della proposta in una data ragione, cioè come il raggio al coseno dell' angolo d' inclinazione di que piani.*

Rappresenti *b*'DE (*fig.* 107) una sezione conica, e B'*de* la sua projezione; e l' asse *b*'A' di quella curva insista perpendicolarmente alla comune sezione A'*a* del

piano di essa curva col piano di projezione; che perciò l'angolo $a'A'M$ contenuto dall'asse e dalla sua projezione rappresenti quello in cui inclinansi i suddetti piani. Sieno inoltre Dd', Ee' due ordinate della sezione conica $b'DE$, e $D'd$, $E'e$ le loro corrispondenti projezioni, che saranno rispettivamente quanto quelle ordinate (196 *dim.*). Ciò premesso

La curva $b'DE$ sia una parabola, starà $b'd' : b'e' :: d'D^2 : e'E^2$, o $:: D'd^2 : E'e^2$. Ma è pure $b'd' : b'e' :: B'D' : B'E'$. Laonde sarà $B'D' : B'E' :: D'd^2 : E'e^2$; e perciò l'altra curva $B'de$ sarà pure una parabola.

Or sia P il parametro della prima parabola, e P' rappresenti quello della sua projezione, sarà $d'D^2 = b'd' \times P$, e $D'd^2 = D'B' \times P'$. Laonde siccome sono uguali que' quadrati, così saranno anche uguali questi rettangoli; quindi sarà $d'b' \times P = D'B' \times P'$, e perciò $P' : P :: b'd' : D'B'$, cioè come $R : cos\ a'A'M$.

In secondo luogo la curva $b'DE$ sia un' ellisse, di cui l'altro vertice sia il punto c', e C' la projezione di esso, sarà $d'D^2 : e'E^2$, o $D'd^2 : E'e^2 :: b'd' \times d'c' : b'e' \times e'c'$, cioè $:: B'D' \times D'C' : B'E' \times E'C'$; vale a dire che la curva $B'de$ sarà anche un' ellisse.

E supponendo essere P, P' i parametri di queste due ellissi, sarà per la prima di esse $b'd' \times d'c' : d'D^2 :: b'c' : P$, e per l'altra sarà $D'd^2 : B'D' \times D'C' :: P' : B'C'$. Laonde, per essere $d'D^2 = D'd^2$ starà $b'd' \times d'c' : B'D' \times D'C' :: (b'c' : P)\ (P' : B'C')$, o pure $:: (P' : P)\ (b'c' : B'C')$. E quindi $P' : P :: (b'd' \times d'c' : B'D' \times D'C')\ (B'C' : b'c')$, cioè $(b'd' : B'D')\ (d'c' : D'C')(B'C' : b'c')$, e finalmente $:: b'd' : B'D'$ (*); vale a dire come $R : cos.\ a'A'M$.

(*) Veg. la Not. alla def. A del lib. V. nella quarta edizione de' miei Elementi di Geometria.

E la stessa dimostrazione si potrebbe applicare anche all' iperbole.

355. *Scol.* Nel presente lemma vi si contiene come un caso particolare l' altro recato nel *n.* 196.

PROP. CXV. PROBL.

356. *Construire l' intersezione di un cilindroide con un piano qualunque.*

Un tal problema, che, come si vede, è un caso del problema generalmente proposto pe' solidi di rivoluzione nel Cap. IX *n.* 190 può, per la specialità di questo solido, restar più elegantemente construito nel seguente modo

Sia IQK (*fig.* 104) il piano segante il cilindroide RQP*pr*, e la curva d'intersezione IQK si voglia projettare sopra un piano PI*p* perpendicolare all' asse del cilindroide.

Si determini l' asse QO di quella curva (342), e quindi il suo vertice Q, del quale ne sia *q* la projezione corrispondente nel piano PI*p*, e quindi *q*A quella dell' asse. Ed essendo dato di sito il piano segante IQK, sarà pur dato l' angolo in cui inclinasi ad esso l' asse del cilindroide, e quindi l' altro dell' inclinazione di un tal piano a quello di projezione, cioè L' angolo QO*q*. Laonde sarà data la specie della curva IQK (342), e perciò quella della sua projezione (354), della quale ne sarà anche noto il parametro; quindi essa si potrà facilmente descrivere intorno all' asse *q*O, e col vertice *q*.

357. *Scol.* Se il piano segante fosse stato perpendicolare all' asse, sarebbesi all' istante construito quel cerchio ch' è l' intersezione di un tal piano colla superficie del cilindroide, ed il quale ha per raggio la per-

pendicolare che dal punto ove quel piano incontra la generatrice della superficie curva suddetta, si abbasserebbe sull' asse della superficie stessa. Che se poi il piano segante passasse per lo centro C del cilindroide, inclinandosi all' asse AB di questo in un angolo ch' è complemento di quello in cui la generatrice YX s' inclina al piano orizzontale Plp; in un tal caso l' intersezione di quel piano colla superficie del cilindroide sarà rappresentata da que' lati di questo solido che incontrano il piano orizzontale in que' punti ne' quali la traccia orizzontale del piano segante intersega la circonferenza del cerchio Plp.

PROP. CXVI. PROBL.

358. *Per una retta data condurre un piano tangente una data superficie di rivoluzione intorno ad un asse verticale.*

Sia a (*fig.* 108) la projezione orizzontale data dell' asse della superficie di rivoluzione, Aa' la projezione verticale dello stesso, $a'p'r'$ la curva generatrice della superficie di essa, e bc, $b'c'$ rappresentino le due projezioni della retta di sito, per la quale vuol condursi il piano tangente.

Dal punto a si abbassi sulla bc la perpendicolare ad, che sarà la projezione orizzontale della minima distanza tra l' asse della superficie di rivoluzione, e la retta data di sito, ed essa ad esprimerà anche in grandezza una tal minima distanza. Ciò posto si concepisca descritta dalla retta di sito la superficie del cilindroide intorno all' asse verticale dato (331); dovrà il piano tangente cercato toccare anche tal superficie in un punto della retta data (352). Or per l' asse e per lo

contatto di questo piano tangente colla superficie di rivoluzione si concepisca passare un piano; intersegherà questo la retta di sito in un punto pel quale vi passa un cerchio orizzontale nella superficie del cilindroide: ed è chiaro, che la tangente di questo cerchio in tal punto, e quella dell' altro che passa, nella superficie di rivoluzione, per lo punto di contatto, debbano esser parallele tra loro; poichè sono perpendicolari allo stesso piano verticale che poc' anzi si è concepito passare per l' asse. Laonde il piano tangente cercato passando per la tangente del cerchio nella superficie di rivoluzione, e per quel punto della tangente dell' altro cerchio nella superficie del cilindroide, ch' era nella retta data di sito; dovrà passare anche per questa tangente (32). Dal che si rileva, che quel punto d' incontro del piano verticale colla retta di sito sia il punto ove il piano tangente condotto per questa alla superficie di rivoluzione data, tocca anche quella del cilindroide. Finalmente è chiaro che quel piano verticale per l' asse debba intersegare la superficie di rivoluzione data nella sua generatrice, la superficie del cilindroide in un iperbole (343), e finalmente il piano tangente queste due superficie curve in una retta, la quale dev' esser tangente comune a quelle due curve.

Or poichè qualunque piano conducasi per l' asse della data superficie di rivoluzione segna in questa superficie, ed in quella del cilindroide sempre le stesse curve generatrici, ed in identico sito; perciò sul piano di projezione verticale si prenda dal punto e' sulla retta $e'd'$, ch' è la projezione verticale della minima distanza tra quell' asse e la retta di sito la $e'r'$ uguale alla ad, cioè alla minima distanza suddetta, e poi col semiasse primario $e'r'$, e col secondario quello che si ottiene nel modo descritto nel n. 343 si descriva l' iperbole conica

$g'r'f'$, sarà questa la generatrice del cilindroide. Finalmente a siffatta iperbole ed alla curva $a'i'p'$ si tiri la tangente comune $g'i'$, o anche più d'una, se si può: dinoterà il punto i' quello da cui si descrive la circonferenza del cerchio nella quale trovasi allogato il contatto del piano cercato colla proposta superficie di rivoluzione; g' sarà l'altro punto da cui si descrive la circonferenza dell'altro cerchio nella superficie del cilindroide, in un punto della quale è questo solido toccato dal piano stesso, e la perpendicolare $g'n'$ alla Aa' ne sarà il raggio. Laonde se per a si tiri la af parallela alla LM, e che dal punto g' si abbassi sulla LM la perpendicolare indefinita $g'Gg$, e finalmente col centro a intervallo ag si descriva il cerchio gh, sarà questo la projezione orizzontale del poc'anzi detto; e quindi il punto h ove la circonferenza gh interseca la retta cb sarà la projezione orizzontale dell'intersezione del piano in cui si trova il cerchio projettato in gh colla retta di sito data, cioè del punto di contatto del piano tangente cercato colla superficie del cilindroide. Adunque la retta ah sarà la traccia orizzontale di quel piano per l'asse che passava pel punto di contatto suddetto, e per l'altro dello stesso piano tangente colla superficie di rivoluzione: che perciò la projezione orizzontale di questo punto dovrà cadere nella ah; ma essa deve anche esistere nella circonferenza ik descritta col centro a, intervallo uguale ad $i'i'$: quindi una tal projezione sarà dinotata dal punto k; e perciò abbassandosi da k sulla LM la perpendicolare fino alla $i'i'$, sarà k' la corrispondente projezione verticale di quel punto di contatto, ed il presente Problema si sarà ridotto al già risoluto nella Prop. LV. (139) di questo Trattato.

359. *Scol.* La soluzione recata al precedente Problema, sebbene fondata sugli stessi principj che quella del Sig. Monge (*pag.* 56 *n.* 47 *Geometrie Descriptive*) è però più elegante di questa, in cui si ha bisogno di construir per punti l' intersezione del piano per l' asse colla superficie del cilindroide; ed inoltre la citata soluzione del Monge aveva bisogno di esser rischiarata moltissimo ne' principj che costituiscono i passaggi della construzione di essa, senza di che sarebbe restata oscura, e come fondata su principj arbitrariamente assunti.

CAP. XVIII.

CONSIDERAZIONI GENERALI SULLO SVILUPPO DELLE SUPERFICIE CURVE.

360. *Def. XIX.* Una superficie curva si dirà *sviluppata* se essa siasi distesa in un piano, in modo che le sue parti nè restino interrotte, nè alcuna di esse sopra un' altra.

361. *Cor.* Si rileva da ciò che la superficie curva sviluppata deve esser precisamente della stessa grandezza ch' era prima dello sviluppo.

362. *Scol.* L' oggetto di questo sviluppo è il poter disegnare più facilmente, e più comodamente le curve che si erano segnate sulla superficie sviluppabile; e può anche talvolta applicarsi convenevolmente alla soluzione di alcuni Problemi, del che ne daremo un saggio in appresso.

PROP. CXVII. PROBL. GENERALE.

363. *Esaminare le condizioni geometriche dello sviluppo delle superficie curve.*

Da' primi Elementi di Geometria è noto, che si possa sviluppare la superficie di un prisma o di una piramide, non considerandovi le basi; e che non sia altronde sviluppabile la superficie di un qualunque poliedro. Or estendendo un poco la condizione che

rende eseguibile lo sviluppo de' due sopra indicati solidi si vedrà, che se in un piano si conducano le rette AB, AD, CF, EG ec. (*fig.* 109), le quali s' incontrino due a due in A, C, E, ec., si potrà sempre immaginare che rivolgendosi lo spazio angolare indefinito DCF intorno ad AD si ponga ad angolo coll' altro BAD; che similmente rivolgendosi lo spazio angolare FEG intorno ad EF si ponga ad angolo con DCF, e così in seguito; sicchè dall' insieme di tutti questi spazj BAD, DCF, FEG, ec. si verrà a rappresentare una superficie indefinita compresa da piani, che sarà sviluppabile. Adunque la condizione geometrica perchè sia sviluppabile una superficie composta da piani è, come si rileva dal già detto, che questi sieno indefiniti al meno per un verso. Or se, per la nota legge di continuità, dalla superficie del prisma si passi a quella del cilindro; dalla superficie della piramide a quella del cono; e dall' ultima superficie poc' anzi descritta si passi a quella superficie curva rettilatera la quale da essa, per l' anzidetta legge, si deriva, si potrà conchiudere generalmente, che: *Sarà sviluppabile una superficie curva, se essa sia indefinita al meno per un verso, ed i suoi lati convengano l' un con l' altro.*

364. *Cor.* 1. Adunque non sarà sviluppabile la superficie di una sfera, e quella di un qualunque solido di rivoluzione, e ciò era già noto dagli Elementi; nè sarebbe sviluppabile una superficie plectoide qualunque.

365. *Cor.* 2. Allorchè, per la legge di continuità, la superficie sviluppabile rappresentata nella *fig.* 109 diviene una superficie curva, allora le AC, CE, EH, ec. costituiranno una curva a doppia curvatura segnata nella superficie sviluppabile suddetta; ed i lati AD, CF, EG, ec. di quella essendo i prolungamenti degli ar-

chetti AC, CE, EH, ec. rappresenteranno le tangenti di tal curva in A, C, E, ec.

366. *Scol.* Le condizioni dello sviluppo delle superficie si possono in più modi determinare. Noi qui ci siamo attenuti a quello primordiale che la Geometria somministra; ed altrove imprenderemo a rinvenirle per le vie dell' Analisi moderna, e col risolvere il seguente Problema: *Ritrovare l' equazione generale per tutti que' solidi la superficie de' quali può spiegarsi in un piano.* Su di che si potrà per ora consultare la dottissima Memoria dell' Eulero, inserita ne vol. XVI. de' nuovi Atti dell' Accademia di Pietroburgo.

PROP. CXVIII. TEOR.

367. ***La tangente di una curva segnata su di una superficie sviluppabile comprende, sullo sviluppo di questa, con quel lato che passava per lo contatto, lo stesso angolo che vi comprendeva prima dello sviluppo.***

Imperocchè si supponga un tale sviluppo eseguirsi precisamente su quel piano che passa per la tangente e pel lato suddetto, e che perciò tocca quella superficie curva nel punto di contatto proposto; sarà manifesto che allor quando un tale sviluppo si sarà effettuato, non avranno sofferta alcuna alterazione nè quel lato nè quella tangente, perchè esistevano già nel piano dello sviluppo. Adunque è chiaro che non dovrà mutarsi l' angolo ch' esse rette comprendono.

368. *Scol.* Essendo facile il determinare l' angolo che la tangente d' una curva segnata su di una superficie sviluppabile comprende col lato che passa per lo contatto, si vede in qual modo si potrà determinare, sullo sviluppo di questa superficie, il sito che vi pren-

de quella tangente. E ciò generalmente assegnato ci risparmia di proporre particolarmente ne' seguenti problemi siffatta determinazione.

PROP. CXIX. PROBL.

369. *Sviluppare una data superficie cilindrica; e rappresentar poi su questo sviluppo una curva data su di essa.*

Prendasi per piano di projezione orizzontale un piano che seghi ovunque la superficie proposta perpendicolarmente alla sua retta generatrice; sarà questa, in tutte le sue posizioni, perpendicolare alla curva d' intersezione da un tal piano segnata sulla superficie cilindrica. Ciò posto, si esponga una retta indefinita PZ (*fig.* 110 *n.* 1, e 2), e da un punto di essa P si ascindano le PQ, QR, RS, ec. respettivamente uguali alle parti *ch*, *hh'*, *h'h''* ec. di quella curva, incominciando da un suo punto qualunque, e nell' ordine come si sono indicate, finchè si ritorni al punto stesso, cioè finchè la retta PY sia uguale alla curva *chec*. Da' punti P, Q, R, ec. si elevino sulla PZ delle perpendicolari indefinite, che rappresenteranno, sullo sviluppo della superficie cilindrica, la retta che la genera nelle posizioni *c*, *h*, *h'* ec.; e troncate da esse le parti P*p*, Q*q*, R*r*, ec. uguali respettivamente alle altezze orizzontali di que' punti dell' intersezione data in essa, i quali trovansi nella generatrice che passa pe' punti *c*, *h*, *h'*, ec. cioè a dire uguali alle rispettive C*c'*, T*i*, ec. la curva *pqrs* che passerà per tutti questi punti *p*, *q*, *r*, ec. in tal modo determinati, rappresenterà quell' intersezione disegnata sullo sviluppo della superficie cilindrica.

370. *Scol.* Si tiri da un punto *m* ad un altro *n*, presi sullo sviluppo della superficie cilindrica, la retta *mn*: è chiaro che questa dovrà intersegare le Pp, Qq, Rr, ec., che rappresentano i lati della superficie cilindrica sullo sviluppo di essa, in uno stesso angolo. Or siccome non cambiasi sullo sviluppo di una superficie cilindrica, nè l'estensione di questa, nè quella di una curva in essa esistente, nè finalmente la posizione rispettiva di tal curva colla generatrice di quella superficie in tutte le posizioni che tal generatrice ha nel descriverla; è chiaro perciò, che quella curva sulla superficie cilindrica, ch' è dinotata nello sviluppo di questa da una linea retta, deve intersegare tutt' i lati del cilindro sotto lo stesso angolo. Ed al contrario ogni volta che una curva segnata su di una superficie cilindrica fa co' lati di questa lo stesso angolo, cioè ch' essa è un' *elica*, dovrà sullo sviluppo di quella superficie venir espressa da una linea retta.

Ciò posto, poichè la retta *mn* è la più breve di quante possonsene condurre dal punto *m* all' altro *n*, e ch' essa dinota una parte di un' elica sviluppata; ne segue anche dal già detto, che la più breve via per andare in su di una superficie cilindrica da un punto ad un altro sia l' arco dell' elica che attraversa que' due punti.

E ciò che in ultimo si è detto in questo Scolio potrà di leggieri estendersi alle superficie coniche, ed in generale a tutte le superficie sviluppabili, cioè, che: *Tutte le volte che un arco di curva in taluna di esse segnato si sviluppi in una linea retta, dovevasi da quello rappresentare la più corta distanza in su tal superficie curva tra que' due punti che n' erano gli estremi.*

PROP. CXX. PROBL.

371. *Sviluppare una superficie conica a base qualunque, ed indi segnare su tale sviluppo una linea curva data in essa.*

Si construisca l' intersezione della proposta superficie conica con un' altra sferica concentrica (*p.*LXX. *cas.*1.), è evidente che tutt' i punti di quest' intersezione essendo equidistanti dal vertice della superficie data, debbano trovarsi sullo sviluppo di essa ad uguali distanze da quel punto ch' esprime il vertice, ed esser perciò allogati in un arco circolare descritto con un raggio uguale a quello della sfera, e nel quale il centro dinota il vertice della superficie conica nello sviluppo di essa. Or sia T (*fig.* 61 *n.* 2) il centro di quest' arco indefinito XYR, ed X dinoti un punto preso in esso, e corrispondente all' altro sull' intersezione delle due superficie conica e cilindrica, ch' è projettato in *k*, *k'* (*fig.*61), e dal quale si voglia incominciare a ridurre su quell' arco circolare questa intersezione. Per ciò eseguire bisogna che prima essa si privi di una delle sue due curvature, sviluppandola, cioè, in un piano. Ad ottener questo, si sviluppi quella superficie cilindrica verticale, che ha per traccia la projezione orizzontale di siffatta intersezione, e sulla quale questa esiste, e poi si rapporti su di un tale sviluppo tal curva stessa, ch' era segnata sulla superficie cilindrica, e su quella della sfera e del cono; perderà così essa una delle sue due curvature; e tal linea in questo modo disegnata nel piano, sia rappresentata dalla *zyvuz* (*fig.*61 *n.*2, *e n.* 3). Ciò posto si ripieghi siffatta curva sull' arco XYR, vale a dire si porti, per esempio, l' arco *zy* di essa, parte a parte, da X in Y sull' arco circolare XYR; il punto Y sarà sulla superfi-

cie conica sviluppata: ed allorchè l'intera curva *xyvuz* si sarà ripiegata sull' arco XYZ, l'intero settore XYZT rappresenterà lo sviluppo della proposta superficie conica.

Finalmente se su ciascun raggio TV (*fig.* 61 *n.*2) si prenda un punto V il quale disti dall' altro T, per quanto è distante dal vertice A della superficie conica proposta quel punto della curva d' intersezione in essa segnata, il quale trovasi in quel suo lato, che vien dinotato da TYV sullo sviluppo; la curva che passerà per tutt' i punti V in simil modo determinati dinoterà la curva segnata sulla superficie conica rapportata sullo sviluppo della stessa.

372. *Scol.* Se la superficie conica che si vuole sviluppare fosse quella di un cono retto a base circolare; in un tal caso la curva d' intersezione di essa colla superficie sferica concentrica sarebbe un cerchio parallella alla sua base. E siccome il raggio di questa sfera può prendersi ad arbitrio, sarà perciò conducente, nel presente caso, di prender per esso il lato di un tal cono; perchè così la curva d' intersezione sarà dinotata dalla base stessa, o sia dalla traccia orizzontale della superficie conica. Ciò posto se nella circonferenza del cerchio descritto con un raggio TX (*fig.*61 *n.* 2) quanto il lato del cono dato si prenda l' arco XYZ uguale alla circonferenza della base di esso (244), il settore XYZT dinoterà lo sviluppo delle superficie di un tal cono.

LEMMA

373. *Se i diametri di due semicerchi si dividano proporzionalmente ; le semiordinate condotte pe' punti delle divisioni divideranno anche proporzionalmente le semiciconferenze.*

Sieno ACB, *acb* (*fig.* 111) due semicerchi descritti co' diametri BA, *ba*, e questi sieno divisi proporzionalmente in E, *e*; sarà BE : EA :: *be* : *ea*, e quindi componendo, poi prendendo le metà degli antecedenti, e finalmente convertendo, starà AD : DE :: *ad* : *de*, ossia CD : DE :: *cd* : *de* :: che perciò i triangoli CDE, *cde* saranno simili (7. VI.), e quindi l' angolo CDE sarà uguale all' altro *cde*, e 'l rimanente CDB al rimanente *cdb*. Ma l' angolo CDB sta all' altro CDA, come l' arco BC all' arco CA; come pure sta l' angolo *cdb* all' angolo *cda*, come *cb*—*a ca*. Adunque starà BC : CA :: *bc* : *ca*.

LEMMA II.

374. *La semiellisse DHB* (*fig.* 112) *che vien segnata sulla superficie del semicilindro DAMBC da un piano perpendicolare al rettangolo DABC, condotto per la diagonale DB di esso, divide la semicirconferenza FHG prodotta sulla stessa superficie cilindrica da un piano parallelo alla base, nella stessa proporzione nella quale il diametro CF di questo divide la semicirconferenza DEA descritta sul lato DA del semicilindro, e nel piano del rettangolo, cioè sta FG : FH :: DA : DE.*

Imperocchè si conduca per K la KL parallela alla DA, per L si ordini nel semicerchio AMB la LM,

e si congiunga la KH, che sarà perpendicolare al piano del rettangolo DABC, perciò parallella alla LM, e quindi uguali gli archi AM, FH. E poichè AD : DF :: BA : FK o AL; starà anche AED : DE :: BMA : AM (*lem. prec.*), cioè :: FHG : FH.

375. *Scol.* Dimostrandosi similmente che stia fh : fhg, o FHG :: De : DEA; starà per ugualità, fh : FH :: De : DE.

PROP. CXX. PROBL.

376. *Dividere un arco o pure un angolo dato in data ragione.*

TERZO METODO PER MEZZO DELLO SVILUPPO DI UNA SUPERFICIE CILINDRICA. (*)

Si sviluppi la superficie di un semicilindro DAMBC (*fig.* 112) segnando inoltre su tale sviluppo la semiellisse DHB ch' era in essa; e sia un tale sviluppo rappresentato dalla figura 113, nella quale sia perciò ab uguale alla semicirconferenza AMB, ad = AD, e la curva dT$Q$$b$ rappresenti la semiellisse DHB sullo sviluppo della superficie del semicilindro, cioè stia QS : SR :: m : n. Or si descriva sulla ad il semicerchio aed, nel cui centro O si costituisca l'angolo dON che sia quanto il dato P, poi per N si tiri la QNR parallela alla bc, la quale si divida in S nella data ragione di m : n. Per S si conduca la ST parallela alla ad, e finalmente per lo punto T ove questa parallela incontra la linea bTd si conduca la TXV parallela alla ba, e tal parallela incontri in X la semicirconferenza aXd, con-

(*) Si riscontrino gli altri due nel Cap. XIII. dal n. 240. al 243.

giunta la OX, questa dividerà il dato angolo dON nella ragione di $m : n$, cioè starà $NX : XD :: m : n$. Imperocchè sta QR : TV, o SR :: $Nd : dX$ (375), e perciò dividendo QS : SR, cioè $m : n :: NX : Xd$, o come l'angolo NOX all'altro XOd.

CAP. XIX.

Nuovo metodo del sig. Fergola per risolvere alcuni problemi di sito, detto di conversione.

377. Questo nostro insigne Geometra, il cui genio per le Matematiche rendendolo superiore alle difficoltà di queste Scienze, lo fece essere il suo stesso precettore in un paese ove fino alla sua epoca mancava una buona e completa istituzione in tali facoltà, essendosi di buon ora accorto della difficoltà de' problemi di sito, immaginò de' nuovi metodi utilissimi a risolverne un gran numero de' più restii alle ordinarie ricerche, e gli propose nel 1786. e 1787. alla Reale Accademia delle Scienze di fresco fondata in Napoli. Or io crederei di far gran torto a' coltivatori de' metodi geometrici, se qui tralasciassi di recare i mezzi che in tali casi propone questo valentuomo, atti non solamente a render più piana la strada per riuscire nel risolvimento di questi difficili problemi; ma anche capaci a farne rinvenire, ove vestigio alcuno non sembrava mai che ne fosse, ed a sottoporre ancora al vasto dominio dell' Algebra questa famiglia di Problemi che sembrava esserne refrattaria. Io dunque, senz' altro fare, presenterò in questo Capitolo del presente Trattato un breve estratto de' principj da lui esposti nella prima delle suddette Memorie, e poi nel seguente recherò i principali di que' problemi di sito che trovansi con tal suo metodo risoluti nella stessa Memoria, ed in un

altra che le vien dopo. E negli altri due Capitoli dopo i già detti proporrò altre sue ricerche su questo stesso importante argomento.

378. Il nostro autore primieramente rapporta a tre principali generi i problemi di Sito, riferendo al primo di essi que' problemi ne' quali *una grandezza data vuolsi con un certo sito adattare entro più linee date di posizione*: Al secondo poi quegli altri ove *la grandezza da adattarvisi non sia data che di sola specie*. Ed al terzo finalmente egli riduce que' problemi di sito che non si appartengono ad alcuno de' due generi precedenti. Ed una tal distinzione è già di gran vantaggio nell' intraprender la soluzione di uno de' problemi di quest' estesissima famiglia, e nell' adattarvi il suo metodo.

379. Premessa tal distinzione, per riguardo a' primi due generi di Problemi di Sito egli propone il seguente metodo, che chiama giustamente

PRINCIPIO DI CONVERSIONE

Quando una grandezza data si vuole adattare con un certo sito fra più linee date di posizione, un tal problema resterà legittimamente risoluto, se vicendevolmente riuscirà di adattare alla grandezza data quelle linee, che con essa ottenendo il sito addimandato, serbino puranche tra loro la data posizione.

380. Un tal principio di conversione non solamente l'è il fonte onde risolvonsi facilmente coll' antica, o pur colla moderna analisi moltissimi problemi di sito, come tra poco faremo vedere; ma l'è anche fecondo del riducimento di tali problemi a pochissimi problemi cardinali che per tal ragione egli chiama acconciamente Porismi, e che sono i seguenti.

PORISMA I.

381. *Dati i due circoli EQF, EQAD (fig. 114. n. 1.), che s' intersechino in E, Q; tirare per lo punto E la segante ECA, sicchè CA parte di essa che resta fra gli archi QC, QA, pareggi la retta M.*

Analisi geometrica.

S' intenda tirata la segante ECA che si addimanda; e s' intendano eziandio condotte le rette AQ, CQ, che uniscano l' altro punto Q cogli estremi A e C della parte richiesta. Ciò posto

Essendo dati di posizione, e di grandezza i circoli FQF, EQAD che s' intersegano, sarà data la retta QE che congiugne le loro sezioni Q ed E: onde sarà dato non meno l' angolo QAC, che l' altro QCE, e quindi QCA conseguente di questo.

È pur data la base AC del triangolo AQC, che dalle condizioni del problema deve pareggiare la retta M. Adunque esso triangolo AQC è dato di specie e di grandezza: quindi sarà dato di grandezza sì il lato QA, che l' altro QC; ed il problema sarà risoluto.

PORISMA II.

382. *Data di posizione la retta DE (fig. 115.) e 'l circolo ANB, e dato di più il punto A nella sua periferia; applicare tra essa retta e l' arco l' altra retta BC, che sia uguale ad M, e congiunta la AB sia l' angolo ABC uguale al dato X.*

CASO I.

La retta DE incontri primieramente il circolo ne' punti D, E, e s' intenda protratta verso N la retta BC, che si vuole adattare col proposto sito tra l' arco EBN, e la retta DC. Ciò posto eccone di un tal caso la corrispondente

ANALISI GEOMETRICA.

L' angolo ABC è dato dall' ipotesi ; l' altro DBA n' è dato eziandio, a cagione de' punti dati A, D ; sarà dunque dato l' angolo DBC di loro somma ; e quindi CBL conseguente di questo (intendendosi la retta DB prodotta verso L).

Di più essendo dato l' angolo DBC, come si è veduto, ed essendo pur anche dato l' altro DBE (imperocchè è dato dall' ipotesi il segmento DBC), sarà dato l' angolo EBC di lor differenza.

Per la qual cosa essendo dati i due angoli CBL, CBE, e dovendo essere la retta CB uguale alla data M, sarà dato di posizione il punto C rispetto ai lati DB, BE dell' angolo DBE dato. Onde il medesimo problema ridurrassi al seguente altro.

PROBL.

DI RIDUZIONE PEL PRIMO CASO DEL PORISMA PRECEDENTE.

383. *Dato il punto C (fig. 116) fuori l' angolo dato DBE ; tirare per esso la retta CED, sicchè la parte DE di questa, che resta fra i lati del dato angolo, sia di una data lunghezza.*

ANALISI GEOMETRICA.

Sia già fatto ciò che si cerca, e per gli punti A e D si tirino la AG, DG parallele respettivamente alle ED, BE. E poichè è data la ED sarà anche data la sua uguale AG; ma di questa n' è pur dato il suo estremo A; adunque l' altro estremo G apparterrà ad una circonferenza di cerchio data di posizione (8). Si compia la figura come si vede, e sarà il parallelogrammo FE uguale all' altro EL (43. *El.* 1.), cioè al parallelogrammo costituito dalle AE, EK, o BD nell' angolo EBD; che perciò il parallelogrammo contenuto dalle FD, EA o DG, nell' angolo poc' anzi detto, essendo uguale a' due equiangoli ad esso contenuti da FB, EA, e da BD, EA, cioè a' due HEAC, e BEHF, ossia all' intero parallelogrammo FBAC, sarà dato il parallelogrammo FBAC, del pari che questo FDG, e quindi il punto G dovrà appartenersi ad un' iperbole. Ma si apparteneva anche ad una circonferenza di cerchio data di posizione. Adunque sarà dato il punto G.

COMPOSIZIONE GEOMETRICA.

Sia ABD (*fig.* 117) l' angolo dato, ed M la data retta da applicarsi in esso, sicchè passasse per lo dato punto C.

Si compia il parallelogrammo CB, e poi tra gli assintoti CF, FD si descriva l' iperbole conica gAG la quale passi per lo dato punto A: di poi col centro questo stesso punto, e coll' intervallo dato M si descriva il cerchio KGL che seghi l' iperbole in G, sarà dato il punto G (9); e tirando per esso la GD parallela alla BA, congiungasi la CD: dico che la ED sia uguale alla data retta M.

Imperocchè si unisca la AG; e si tiri per G la GN parallela alla BD, sarà, per la natura dell'iperbole, FD : AC :: AB : DG, cioè, sostituendo alla ragione di FD : AC l'altra uguale di FC o BA : AE, sarà BA : AE :: BA : DG. Adunque AE è uguale a GD, e perciò la figura EAGD è un parallelogrammo, ed ED uguale ad AG, cioè alla retta data M.

384. *Scol.* Il cerchio KGL deve necessariamente intersegare l'iperbole GA*g* in un altro punto *g* per mezzo del quale si otterrà l'altra delle due soluzioni sempre possibili del problema proposto, rappresentata in figura dalla C*de*. Ed allorchè la retta data M sarà di tal grandezza, che quel cerchio debba intersegare anche l'iperbole G'A'*g'* opposta alla GA*g*, diverranno anche possibili gli altri due casi di questo problema solido, propriamente di quarto grado, i quali daranno una retta quanto la data M adattata per lo punto G tra i lati dell'altro angolo FBA conseguente del dato ABD.

Caso II. del Porisma II.

385. La retta DE non incontri il circolo dato NBA (*fig.* 118).

Soluzione

Si calino dal centro Q, e dal punto dato N (*Ved. l'anal. geom. del cas.* 1.) le perpendicolari QR, NP sulla medesima DE, e congiuntavi la retta CQ si tiri per C la tangente CS. Ciò posto sia

$$\left.\begin{aligned} NP &= a \\ QR &= b \\ CR &= x \\ QS &= g \\ RP &= c \\ BC &= f \end{aligned}\right\} \text{ sarà } \begin{aligned} QC^2 &= b^2+x^2 \\ CS^2 &= b^2+x^2-g^2 \\ CP &= c+x \\ CN &= \sqrt{(a^2+(c+x)^2)} \\ NC \times CB &= f\sqrt{(a^2+(c+x)^2)} \end{aligned}$$

E dovendo essere per la natura del cerchio

$$NQ \times CB = CS^2 \text{, sarà}$$

$$f\sqrt{(a^2+(c+x)^2)} = b^2+x^2-g^2$$

Or pongasi I $y^2 = a^2 + (c+x)^2$,

n' emergerà II $fy = x^2 + b^2 - g^2$,

e di queste due locali quella n.° I si appartiene all'iperbole parilatera di cui ciascuno de' semiassi conjugati è a, $c+x$ è l' ascissa dal centro presa nel semiasse secondario, ed y la semiordinata corrispondente. E l' altra si riferisce alla parabola in cui il parametro principale è f, l' ascissa y è presa sull' asse da un punto che dista dal vertice per una retta uguale alla quarta proporzionale in ordine ad f, $g-b$, $g+b$: e finalmente n' è x la corrispondente ordinata.

Che se dalla prima di tali locali se ne sottragga il doppio della seconda, n' emergerà l' equazione

III $y^2-2fy = -x^2+2cx+a^2+c^2+2g^2-2b^2$,

ch'è al cerchio in cui il raggio è $\sqrt{(a^2+f^2+2c^2+2g^2-2b^2)}$, $x-c$ l' ascissa dal centro, ed $y-f$ la corrispondente semiordinata. E quindi combinando la locale di quest' equazione con quella della seconda, si troverà il proposto problema convenevolmente construito colla combinazione di un cerchio e di una parabola.

PORISMA III.

387. *Dati i due circoli BKT, FAH (fig. 119), e'l punto F nella periferia di questo, adattare tra le dette periferie la retta AB, che sia uguale alla data M, e congiuntavi la FA sia dato l' angolo FAB.*

Analisi Geometrica.

I centri C, D de' due circoli dati si congiungano

per la CD, che si prolunghi in E; di poi si uniscano le AE, AH, le quali si prolunghino indefinitamente in X, Y, e col centro B, intervallo BD si descriva il cerchio DKR.

E poichè è dato l'angolo FAB, non meno che l'altro FAE, sarà pur dato l'angolo EAB: ma è fra di loro data la retta AB, e l'angolo retto EAH; saranno dunque dati di posizione l'angolo EAH e 'l cerchio DKR. Sono anche date le rette EH, HD. Laonde la risoluzione del proposto Porisma si ridurrà a quella del seguente

PROBL.

388. *Applicare nell' angolo retto XAY la data retta EH, sicchè sia data la retta HD intercetta fra il lato AY di quell' angolo, e 'l dato cerchio DKA.*

Analisi Geometrica.

Dal punto D si cali su di AY la perpendicolare DN; e per gli triangoli simili AEH, HND sarà EH : HD :: AH : HN; ed ED : AN :: HD : HN, e quindi $ED^2 : AN^2 :: HD^2 : HN^2$. Laonde convertendo e permutando quest' ultima analogia sarà $ED^2 : HD^2 :: ED^2 - AN^2 : DN^2$: che perciò tagliandosi da AY la AP uguale alla ED, e prolungandosi XA in Z, sicchè AZ uguagli HD, sarà $AP^2 : AZ^2 :: AP^2 - AN^2 : DN^2$. Adunque il punto D apparterrà all'ellisse descritta co' semiassi AP, AZ; e le intersezioni di questa col circolo DKR determineranno le posizioni della retta ED, che soddisfa alle condizioni del Problema.

PROBLEMA GENERALE

389. *Indicare le leggi del metodo di conversione, onde risolvonsi i problemi di sito del primo genere, e quelli del secondo.*

Parte I. Allorchè si propone di adattare una grandezza data tra più linee date di sito, converrà proccurare di circonscrivere a tal grandezza quelle linee in modo che le conservino il sito addimandato, e sieno quivi disposte come sono date nel problema. Al che ottenere.

I°. Si osservino diligentemente i luoghi che nascono dalle posizioni di quelle linee, che vogliosi circonscrivere alla grandezza data. Ed essi saranno ordinariamente o rette, o archi di cerchio.

II°. Si vegga di più se per menare a fine questo problema converso basti determinare le sole sezioni de' mentovati luoghi; il che non di rado addiviene ne' problemi facilissimi di tal genere.

III°. E se ciò non basti, riflettasi attentamente sulle posizioni delle linee proposte nel problema, affinchè la soluzione del problema converso si riduca a situare in mezzo a due circoli, o ad una retta ed un circolo un' altra retta data, con un dato sito.

Parte II. Che se la grandezza proposta ad adattarsi tra più altre date sia di sola specie, il qual caso comprende tutti i problemi di sito del secondo genere (376), allora

I°. Si proccuri di circonscrivere alla grandezza data di specie le linee che le serbano il sito addimandato nel problema, e che quivi fra loro ottengano una posizione simile a quella, onde in esso sono proposte.

II°. Conosciutasi la ragione che serbano le parti di queste linee tagliate dalla grandezza che dentro di esse ne giace applicata, si saprà la ragione che dovranno avere gli analoghi segmenti delle linee date di posizione; onde di leggieri si conoscerà il modo di adattare entro le linee date la grandezza data di specie.

390. *Scol.* I Problemi che recheremo nel seguente Capitolo serviranno di rischiaramento a ciò che si è qui generalmente indicato.

CAP. XX.

PROBLEMI DI SITO DEL PRIMO, E DEL SECONDO GENERE RISOLUTI PER MEZZO DEL PRINCIPIO DI CONVERSIONE DEL SIG. FERGOLA.

PROBLEMI DEL PRIMO GENERE

PROBL. I.

391. *Dato il circolo FAQ (fig. 120 n. 1.), ed ovunque l'angolo rettilineo CNO, adattare tra i lati di esso la retta CO, sicchè tirata per C la tangente CA al dato circolo, sia l'angolo ACO uguale al dato X.*

CONVERSIONE DEL PROBLEMA.

S'intenda fatto l'angolo ACO uguale al dato X, e 'l lato CO uguale alla data retta M, e si proccuri di adattarvi il circolo FAQ, e l'angolo rettilineo CNO, sicchè serbando fra loro quel sito onde son proposti, ottengano coll'angolo ACO la richiesta posizione.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CONVERSIONE.

Sulla retta *co* (*fig.* 121 *n.* 1, *e* 2) uguale alla data M si formi il segmento circolare *cno* capace dell'angolo CNO; sarà l'arco *cno* il luogo de' vertici di tali angoli. Di poi si conduca la retta *fl* parallela al lato

ac dell'angolo *aco* uguale ad X, che disti da esso per una retta uguale al raggio FA del dato circolo. E sarà tal parallela il luogo de' centri de'cerchi uguali ad FAQ, che tocchino tutti la retta *ac*.

Ciò posto, perchè il centro F del dato circolo ha una data distanza dal vertice N dell'angolo dato ONC, ed è data eziandio l'inclinazione della congiunta FN al lato NC, si ridurrà il proposto problema ad applicare tra la retta *fl* e l'arco *cno* un'altra retta *fn*, che sia uguale alla data FN, e che l'angolo *fnc* pareggi il dato FNC, cioè al Porisma II.

392. *Cor.* La stessa soluzione converrà praticare, se il triangolo dato COD (*fig.*121. *n.*1.) vogliasi situare entro i lati dello stesso angolo CNO in maniera che gli angoli C ed O stiano su de' lati CN ed NO, ed il lato CD prolungato tocchi il circolo dato FAQ.

SCOL.

393. Ed un analoga conversione e soluzione potrà adoperarsi quando si voglia risolvere quest'altro

PROBLEMA.

Dato ovunque l'angolo rettilineo CNO (fig. 121 n.1 e 2), e'l circolo FAQ, condurgli la tangente ACO, sicchè CO parte di essa che vien tagliata da' lati del dato angolo pareggi la retta data M.

Sarà anche in questo caso l'arco *onc* descritto colle condizioni di poc' anzi il luogo de' vertici degli angoli uguali ad N. La parallela *fp* alla *oc* distante da essa per la FA, sarà il luogo de' centri degl' infiniti circoli uguali ad FAQ, e tangenti la retta *oca*. Ed

applicando tra l' arco *onc* e la retta *pf* la *nf* uguale alla retta data M, e che faccia colla congiunta *cn* l' angolo *cnf* uguale al dato CNF (*por.* II), col centro *f* intervallo *fa* uguale ad FA si descriva il circolo *faq*, avranno questo circolo e l' angolo *onc*, la posizione e la grandezza stessa che il circolo FAQ e l' angolo dato ONC; e la retta *aco* soddisferà al problema: sicchè volendo poi construirlo sulla figura proposta non resterà a far altro, che prendere NO uguale ad *no*, e condurre per O la tangente OA al circolo FAQ.

PROBL. II. (*)

394. *Date di posizione le tre rette* ae, ad, cf (*fig.* 114. *n.*1 *e* 2) *che nè sieno tra se parallele, nè convengano ad un medesimo punto, inscrivervi il triangolo EFD dato di specie e di grandezza, sicchè gli angoli, E, F, D giacciano sulle rette* ae, cf, ad *respettivamente*.

Soluzione

Su del lato ED del triangolo EFD si descriva il segmento circolare EAD, che contenga l' angolo *a*. Si formi parimente sopra l' altro lato EF il segmento EQCF, che in se comprenda gli angoli uguali ad *fce*. Indi si tiri per lo punto E la segante ECA, talchè la parte CA che resta fra gli archi de' segmenti costituiti adegui la data *ca* (*por.* 1. *n.*381). Finalmente si conduca per C ed F la retta CF, e per A e D l' altra AD: conserveranno le tre rette AE, AD, CF una posizione identica alle tre date *ac*, *ad*, *cf*, ed in esse giacerà adattato il triangolo dato EFD, giusta le condizioni del Problema.

(*) E' questo il Lemma XXVI. de' Principj Matematici del Newton.

395. *Cor.* Collo stesso artificio si scioglierà il seguente problema : *Adattare tra le medesime rette date* ae, ad, cf *un' altra retta, che sia data di grandezza, e vi sien dati di ragione i suoi segmenti tagliati dalle medesime*.

SCOL.

396. Si potrà anche per mezzo del precedente problema e del Lemma XXIII. de' Principj Matematici del Newton risolverne un altro, che a prima vista sembra difficilissimo, e che qui appresso rapporteremo, dopo di aver recato il Lemma suddetto.

LEMMA.

397. *Se due linee rette AC, BD (fig.122) date di posizione sieno terminate ne' punti A, B, ed abbiano una data ragione, e la retta CD che unisce i punti indeterminati C, D si seghi in K anche in ragion data: dico che il punto K sarà allogato in una retta data di posizione.*

Le rette AC, BD concorrano in E, e si faccia BG : AE :: BD : AC, ed FD sempre uguale alla data EG; sarà per construzione EC : GD o EF :: AC : BD, e perciò in data ragione: laonde sarà dato di specie il triangolo CEF. Si seghi CF in L in modo che stia CK : CD :: CL : CF; e per esser data quella prima ragione, e quindi la sua uguale, sarà anche dato di specie il triangolo EFL, ed il punto L sarà allogato in una retta EL data di posizione. Si unisca LK, e sarà anche data la ragione di LK : FD ch' è uguale a quella di CL : CF; quindi sarà data la LK, alla

quale se si tagli la EH uguale, e congiungasi la HK, sarà un parallelogrammo la figura EHKL, ed il punto K si apparterrà alla retta HK data di posizione.

Problema.

398. *Date le due rette AD, BN (fig. 123) terminate ne' punti D, N, applicarvi il dato triangolo ACB, sicchè gli angoli A e B tocchino le date rette AD, BN, e condotta per lo terzo angolo C la retta FCM in maniera che i segmenti FC, CM sieno nella data ragione, in data ragione stia pure FD : MN.*

Essendo data la ragione di FC : CM, non meno che l'altra di FD : MN, il punto C, ove la retta FM che soddisfa alla seconda delle condizioni esposte nel Problema, resta divisa in data ragione, dovrà trovarsi allogato in una retta CQ data di posizione (*lem.prec.*). Adunque il proposto problema si ridurrà ad adattare tra le tre rette date di sito AD, BN, CQ il triangolo dato ABC, cioè, come si era già indicato (396) a quello che si è risoluto nel n. 394.

PROBL. III.

399. *Dato di posizione l'angolo rettilineo YAZ (fig. 124) ed il cerchio BDR, adattare tra essi il dato triangolo FHD, sicchè l' angolo F sia nel lato XY di quell' angolo, l' altro H nell' altro lato VZ, e finalmente il terzo D nella circonferenza del cerchio dato.*

Soluzione

Siasi adattato un tal triangolo nel modo proposto,

e su di FH s' intenda costituita la porzione di cerchio FAH, che in se comprenda angoli uguali al dato YAZ. Indi congiungasi il punto A coll' altro B centro del cerchio DR, e si concepisca descriversi col centro D, intervallo DB il cerchio BKT.

E poichè la data porzione di circolo FAH poggia sopra FH lato del dato triangolo FHD, e che del cerchio BKT n' è D il centro, saranno dati di sito i due circoli FAH, BKT: ma tra le circonferenze de' medesimi si trova adattata la data retta AB in modo che l' angolo FAB è dato; e l' arco FAH è il luogo de' punti A vertici degli angoli YAZ i di cui lati AY, AZ passano sempre per gli punti F ed H; come anche l' altro cerchio DKT è il luogo de' punti B centri de' circoli BDR che passano sempre per D. Adunque il proposto problema si convertirà nell' altro di: *Adattare fra i circoli FAH, DKT dati di grandezza e di sito la retta AB, sicchè unita FA, l' angolo FAB pareggi un dato*; e quindi risolverassi per mezzo del Porisma III.

SCOLIO

400. Lo stesso problema di poc' anzi potrebbe ricevere un' altra soluzione più generale, perchè può estendersi a due rette ed una qualunque curva.

Dato di posizione un angolo rettilineo, ed una qualunque curva, bisogna applicare tra esse un triangolo dato di specie e di grandezza, in modo che gli angoli del triangolo sieno sulle tre linee date.

Soluzione.

Essendo dato di specie il triangolo ADC (*fig.* 125) che sia applicato nel modo già detto tra le due rette BA, BC,

e la curva GDE, dovranno esser dati l'angolo DAC, ed i lati AD, AC che lo comprendono; e facendo al punto B della CB l'angolo CBL uguale al dato CAL, sarà data di posizione la BL. Oltre a ciò unito il punto C coll'altro L ove tal retta incontra la DA, pe' quattro punti C, A, B, L potrà passarvi un cerchio; essendo uguali gli angoli CAL, CBL: e sarà dato l'angolo ACL come complemento a due retti dell'angolo dato ABL. Dunque sarà dato di specie e di grandezza il triangolo ACL che ha per base la data AC, e dove sono puranche dati gli angoli ACL e CAL ad essa adjacenti: onde vi dovrà esser dato il lato AL, e la rimanente LD. Or essendo data la retta AL sottesa del dato angolo ABL, il luogo del punto D dee essere un'ellisse data di sito e di grandezza. Dunque l'intersezione di questa curva coll'altra EDG, ch'è data, dovrà segnarvi i punti soddisfacenti al Problema.

PROBL. IV.

401. *Dati di sito i tre circoli DKM, FYX, HNQ (fig. 126) adattare tra i medesimi il dato quadrilatero ABCE in modo, che il vertice A dell' angolo BAE sia nella circonferenza del cerchio DKM, ed i lati BC, CE tocchino respettivamente i cerchi FYX, HQN.*

Soluzione.

Siasi di già applicato un tal quadrilatero nel modo che si cerca, ed i centri D, F, H de' dati circoli si congiungano colle DF, FH, HD. Indi per F ed H s'intendano condotte le XY, VZ respettivamente parallele alle BC, CE; saranno queste parallele i respettivi luoghi de' punti F, H centri de' circoli FXY, HQN,

i quali toccano sempre respettivamente le rette BC, CE. Finalmente si concepisca descriversi col centro A intervallo AD il cerchio ADK, che sarà il luogo de' centri D de' circoli DKM che passano sempre per A.

Or essendo date di sito le rette XY, VZ e 'l circolo ADK; e ritrovandosi il dato triangolo DFH situato in modo, che gli angoli del medesimo F, H, D toccano respettivamente le suddette linee; il presente problema ridurrassi ad: *Adattare il dato triangolo FHD tra le rette di sito XY, VZ e 'l circolo ADK dato anche di sito e di grandezza, sicchè gli angoli F, H, D di quello giacciano respettivamente su di esse linee*, cioe al Probl. III. (399).

PROBLEMI DEL SECONDO GENERE

PROBL. V. (*)

402. *Date di posizione le quattro rette AB, AD, DB, Ci, (fig. 127) applicarvi un quadrilineo simile al dato FGHI, sicchè gli angoli F, G, H, I giacciano su di esse respettivamente.*

SOLUZIONE.

Facciasi su di FG il segmento FaKG capiente l'angolo dato BAD: su di IH il segmento IbKH comprendente gli angoli uguali a DBC: e finalmente su di FI l'altro segmento FcnI, che comprenda gli angoli uguali al dato C. Ciò posto s'intenda tirata dal pun-

(*) Questo Probl. è il Lemma XXVII. de' Principj Matematici del Newton.

to F la retta Fc, i cui segmenti *ab*, *bc* tagliati dagli archi de' tre descritti circoli sieno fra loro come AB: BC. E questo otterrassi col seguente metodo. Essendo dati i punti F e K ove si tagliano i primi due segmenti, sarà data la retta FK, e quindi tanto il segmento F*a*K, che l' altro F*b*K. Dunque il triangolo *a*K*b* è dato di specie; e perciò di ragione *ab* e *b*K: ma è pur data la ragione di *cb* a *ba*. Quindi sarà data la ragione di *cb* a *b*K, e per conseguenza il triangolo *c*K*b* è ancor dato di specie. Laonde sarà dato l' angolo *bc*K. Per lo che se sopra FK si formi un segmento capiente un angolo uguale a *bc*K, che tagli l' arco FcK in un punto *c*; questo punto sarà il richiesto.

Si tiri dunque per *c* la retta F*c*; ed indi si uniscano le rette G*ad*, H*bd*, I*c*; sarà la posizione di queste quattro rette F*ac*, G*ad*, H*bd*, I*c* simile a quella delle date *f*AC, *g*AD, *h*BD, *i*C. Finalmente si faccia *ba* : *a*F :: BA : A*f*; di più *da* : *a*G :: DA: A*g*, ec. e si uniscano i punti *f*, *g*, *h*, *i* per mezzo delle rette *fg*, *gh*, *hi*, *if*; sarà il quadrilineo *fghi* simile ad FGHI, ed applicato in mezzo alle linee date nella maniera richiesta.

PROBL. VI.

403. *Date di posizione le due rette LN, LM (fig. 128 n. 1.), e 'l punto P fuori di esse menare alle sottoposte rette due altre PM, PN, che faccian seco un angolo uguale ad un dato, e sieno tra loro in una data ragione.*

SOLUZIONE.

Facciasi l' angolo FAG (*fig.* 128 *n.* 1 *e* 2.) uguale al dato, e che i suoi lati sieno nella data ragione. Indi si

unisca la retta PL, e si descriva su di AF il segmento circolare AKF, che comprenda angoli uguali a PLM, e su di FG (retta che unisce i punti F, G) l'altro segmento FHG, tal che gli angoli in esso compresi adeguino MLN. Si tiri la retta EA, e troncata AB uguale a PL, si menino BD, BC parallele ad EF, EG, e si tiri DC. Finalmente si taglino LM, LN respettivamente uguali a BD, BC, e si uniscano PM, PN: saranno queste nella data ragione, e comprenderanno l'angolo dato.

404. *Scol.* Da questa soluzione si può fare facilmente dipendere quella del seguente altro

PROBLEMA.

Poste le medesime cose del Problema precedente si voglian tirare dal dato punto P (fig. 128 n. 1) fuori l'angolo NLM le due rette PM, PN, che faccian tra loro un dato angolo, e congiunta NM, il triangolo NPM stia alla somma de' quadrati di PM e di PN come R a T.

ANALISI GEOMETRICA.

S'intenda prolungata NP in m, sicchè sia $Pm =$ PM. E perchè il rettangolo mPN sta al triangolo MPN, a cagione dell'angolo dato MPN in una costante ragione, cioè di una qualunque retta S alla retta R; e come R a T, così dee stare il triangolo MPN alla somma de' quadrati di mP e di PN; sarà per equalità ordinata $mPN : mP^2 + PN^2 :: S : T$, e quindi $2mPN : Pm^2 + PN^2 :: 2S : T$; ed invertendo e componendo $mN^2 : 2mPN :: T + 2S : 2S$: sarà dunque data la ragione di mN a PQ; e quindi la ragione di mP, ovvero di MP a PN; che perciò questo problema si ridurrà al precedente

CAP. XXI.

Di que' problemi di sito che risolvonsi per mezzo di lemmi.

405. Moltissimi difficili problemi di sito pe' quali nessun sentiero conducente alla loro soluzione è riescito ritrovare, malgrado gli sforzi ed i tentativi che dal geometra inventore ed esercitato si sieno fatti, possono in agevol guisa restar risoluti per mezzo di qualche lemma che si rinvenga all' uopo; al che ottenere conviene ponderare attentamente or la natura del problema che si vuol risolvere, ed or le conseguenze che derivansi dal suppor fatto ciò che in esso ricercasi. E siccome queste tali cose o affatto, o con difficoltà grandissime si mostrano nella tela di un calcolo analitico, sebbene maestrevolmente eseguito: è perciò che il tentare questi tali problemi col puro calcolo algebrico, riesce inutil cosa, o difficile oltremodo. Ed a ciò che si è detto potrà servir di prova il problema del cerchio e de' tre punti proposto dal celebre Cramer, che più giù risolveremo, e del quale potrà leggersene la storia ed i tentativi fatti per risolverlo da' più insigni Analisti moderni negli Opuscoli Matematici della Scuola del Sig. Fergola, pubblicati nel 1811.

In questo metodo di proceder per lemmi nella soluzione de' problemi di cui parliamo, gli antichi dovettero oltremodo distinguersi, senza di che le Collezioni Matematiche di Pappo non ci presenterebbero

ancora un gran numero di lemmi che a proposito usati conduconci talvolta dal più profondo bujo in pieno meriggio, per la soluzione di molti de' suddetti problemi, nè tanta importanza troveremmo da essi data ai porismi dell' accuratissimo Euclide, come già altra volta dicemmo.

Intanto perchè ciò che qui si è generalmente indicato ognun vegga col fatto, proporrò in questo Cap. alcuni problemi di Sito, che vedransi poi, nella maniera poc' anzi indicata, elegantemente risoluti.

PROBL. I. proposto dal Cramer

406. *Nel dato cerchio NDG (fig. 130) inscrivere il triangolo DEF, i di cui lati distesi passino pe' tre punti dati A, B, C.*

Metodo del sig. Giordano

LEMMA

407. *Se dagli estremi A, e B (fig. 129) della retta AB data di posizione s' inflettano ad uno stesso punto D della circonferenza DEG le due rette AD, BD, e poi da un punto E delle loro sezioni E ed F conducasi la EG parallela alla data AB; la retta che congiunge l' altro punto F coll' estremo G dell' anzidetta parallela, dovrà sempre incontrare in un dato punto H la retta AB.*

Dim. Imperocchè i due triangoli FHB, DAB, che han di comune l' angolo in B, han pure uguali i due angoli BHF, ADB, come uguali al terzo EGH; dunque sarà BF : BH :: AB : DB, e 'l rettangolo ABH uguale al dato DBF. Onde sarà dato il punto H.

Analisi Geometrica del Problema.

408. I°. Sieno A, B, C (*fig.* 130) i tre punti dati, ed EDF il triangolo richiesto. Dal punto E conducasi la EG parallela alla data AB, e vi si unisca la GF. Questa retta in virtù del Lemma precedente dovrà passare per lo dato punto H della AB.

II°. Si congiunga la retta HC, alla quale si meni per E la parallela EI, e si unisca la IG. Anche quest' altra retta dovrà per lo stesso Lemma passare per lo dato punto K della HC.

III°. Ed essendo date di posizione le rette EG, ed EI, che son parallele alle date AB, HC, sarà dato l' angolo GEI, ch' esse comprendono: e ne sarà benanche dato il suo duplo GLI, congiungendone i due raggi LG, LI, e la LK. Il perchè sarà puranche dato l' angolo LGI alla base del triangolo isoscele GLI, e quindi il suo conseguente LGK.

Dunque il Problema si è ridotto a descrivere sulla data retta LK un segmento di cerchio capiente un angolo dato.

Metodo del Signor Castiglione. (*)

LEMMA

409. *Se dal punto G (fig. 131) preso nel diametro prodotto AB del cerchio AFB si tiri ad esso una qualunque segante EG, e dal punto E, ch' è una del-*

(*) La soluzione del Castiglione non è in verità sì semplice come quella che qui, e negli Opuscoli si è recata; avendola sgravata di molte ricerche, che v' erano inutili.

le due sezioni, si conduca l' ordinata ED ad un tal diametro; la retta DF, che unisce l' altro estremo D di cotesta ordinata coll' altro punto F delle sezioni, dovrà sempre incontrare il detto diametro in un dato punto H.

Dim. Si uniscano le rette DA, AE, AF. Ed essendo DE perpendicolare al diametro AB, sarà l' angolo DAB uguale all' angolo BAE. Ma l' angolo DAB è uguale all' angolo HFB, poichè sono nell' stessa porzione; e l' angolo BAE è uguale all' angolo BFG per lo quadrilatero BAEF. Dunque l' angolo HFB è uguale all' angolo BFG, e con ciò dee essere GF : FH :: GB : BH.

» Ciò posto tirisi la HX parallela alla EF, sarà
» l' angolo HXF uguale all' alterno EFA, o sia ad
» AFD, essendo gli archi AE ed AD uguali; e per-
» ciò HX sarà uguale ad HF. Ma pe' triangoli simili
» AGF, AHX, è AG : AH :: GF : HX o FH; ed è
» poi GF : FH :: GB : BH; quindi sarà AG : AH ::
» GB : BH, e la AG divisa armonicamente in H e B(*).

ANALISI GEOMETRICA DEL PROBLEMA.

410. I°. Sieno A, B, C (*fig.* 132) i tre punti dati, ed EDF il triangolo richiesto. Dal punto F si conduca la FG parallela alla data AB, e si unisca la

---

(*) La dimostrazione dell' esposto lemma di Pappo ritrovasi mutilata nel testo: l' accortissimo Commandini si contentò di sostituirgliene una indiretta, ed il nostro Sig. Fergola nel recare un tal lemma negli Opuscoli Matematici, ne completò la dimostrazione sulle orme medesime del Geometra Greco.

EG. Questa retta in virtù del Lemma recato al n.407 dovrà passare per un dato punto K della AB.

II°. Si unisca il centro L del dato cerchio col detto punto K; e sulla LK si abbassi dal punto G la perpendicolare GRO, e poi si congiunga la OE. Cotest' altra retta, per lo Lemma precedente, dovrà segnare il dato punto Q nel diametro NM.

III°. Ciò posto, essendo date di posizione le due rette GF, e GO, sarà dato l'angolo OGF, o il suo uguale OEF. Ma i lati di questo secondo angolo passano respettivamente pe' dati punti Q, e C. Dunque il Problema vedrassi ridotto a costituire sulla retta QC un segmento di cerchio capiente un angolo dato.

PROBL. II.

411. *Nel dato cerchio DFG (fig. 133) inscrivere il triangolo DEF, di cui due lati DE, DF passino per due punti dati A e B, e per l'altro C la retta FC, che col terzo lato EF costituisce un dato angolo in F.*

Analisi Geometrica.

Si conduca ad AB la parallela EG, e congiungasi la GF; questa segnerà in AB il dato punto H. Si unisca la HC, e si divida in K, sicchè il rettangolo KHC adegui il dato FHG: e congiunta la KG, si distenda la medesima in I, e si tirino le rette EI, LG.

E perchè sono simili i due triangoli HKG, HFC, che hanno l'angolo GHC di comune, ed i lati intorno ad esso proporzionali, saranno uguali i due angoli HKG, HFC. Ma questo coll' angolo EFH, o sia EIG costituisce un dato angolo EFC. Dunque sarà data la

somma de' due angoli HKI, EIK; e perciò se si producano le rette EI, HC, incontrandosi, dovranno costituire un dato angolo. Or le rette HC, HB son date di posizione, dunque ancora EI incontrando la AB deve formare con essa un dato angolo. Ma questo poi è uguale all' altro IEG, a cagione delle parallele EG, AB. Dunque è dato un tale angolo IEG, e conseguentemente l' altro LGK, e 'l punto G. Ed il problema proposto potrà facilmente comporsi.

412. *Scol.* I due seguenti Problemi si possono risolvere con un artifizio simile a quello del precedente. Le loro soluzioni si ritrovano recate dal Sig. Giordano a disteso nel *Vol. IV.* degli *Atti di Verona*; e ne' nostri Opuscoli vi si potranno leggere altre ricerche affini a questo argomento.

I. *In un dato cerchio incrivere un triangolo, di cui un lato passi per un dato punto; e per gli altri due punti dati vi passino le rette, che co' due rimanenti lati costituiscano angoli dati a' loro estremi.*

II. *In un dato cerchio inscrivere un triangolo, sicchè condotte da tre punti altrettante rette a due degli angoli del medesimo, queste comprendano co' respettivi lati angoli dati.*

PROBL. III. GENERALE.

413. *Nel dato cerchio MNP (fig. 134) inscrivere il poligono MNOPQ di tanti lati quanti sono i punti dati A, B, C, D, E, pe' quali quelli debbon passare.*

Metodo del signor Giordano

Analisi Geometrica.

Uniscasi la AB, alla quale s' intenda condotta per M la parallela MR, e congiungasi ROH. Similmente si unisca la HC, e tiratavi per R la parallela RS, si congiunga SPK. E di nuovo unita la DK le si tiri per S la parallela ST, e congiungasi TQX. Indi uniscasi EXY, alla quale si tiri per T la parallela TV, e si congiunga VMY. E così si continui a fare se vi sieno più punti dati. Saran dati gli angoli MRS, RST, STV ec. del poligono MRSTV, come quelli che pareggiano respettivamente i dati AHK, HKX, KXY ec. Se dunque è pari il numero de' lati MR, RS, ST, TV ec. di questo poligono (il che ha luogo quando la figura da inscriversi ha un numero impari di lati), comprendendo angoli dati il primo di essi lati MR col secondo RS, il terzo ST col quarto TV ec., sarà dato l' intero arco MRSTVec, e quindi la sua sottesa MV; e perciò anche il punto M, dal quale poi tutti gli altri V, O, P, Q, ec. restan facilmente determinati.

Che se poi il poligono MNOPQec da inscriversi abbia un numero pari di lati, sarà impari quello delle rette MR, RS, ST, TV ec.; e quindi la MV non verrà ad essere le sottesa di un arco dato. Intanto in questo caso, essendo pari il numero delle rette RS, ST, TV, ec., sarà dato l'arco RSTVec, e quindi l' angolo RMV; e perciò distesa YMV in F, sarà anche dato, per le parallele RM, AB, l'angolo YFA; ond' è, che anche in questo caso resterà determinato il punto M.

Composizione Geometrica

Il primo caso di questo Problema si riduce ad *inclinare da un dato punto ad un cerchio una retta, sicchè l' intercetta sia data*, cioè a *ritrovar due rette reciproche a due date, che abbiano una data differenza*. E l'altro alla 23. *El.* 1., ond' è che la sua composizione gometrica è manifesta.

Metodo del signor Scorza

PORISMA.

414. *Se da due punti dati A e B (fig. 135, e 136) inflettansi alla periferia del dato cerchio DEG le rette AE, BE, che di nuovo lo incontrino ne' punti D ed F; dovrà la retta DF delle loro intersezioni formare ad un suo estremo un angolo dato con un' altra tendente ad un punto dato.*

Dim. Si tiri dal punto D la DG parallela ad AB, che ne congiunge i dati punti A e B; e di poi si unisca la GF, che segnerà nella retta AB il punto dato H (*lem.* n. 407), e questo punto dato H si congiunga col centro C del cerchio mediante la retta HC, cui si abbassi la perpendicolare GM, che incontri la circonferenza nel punto I; e si unisca la FI, la quale ne incontrerà il diametro nel dato punto K (*lem.* n. 409). Ciò premesso, l' angolo DGI è dato, avvegnachè formato da due rette DG, GI, date di sito. Dunque sarà dato del pari il suo uguale, ovvero il supplemento a due retti DFI, ch' è formato dalla retta DF delle intersezioni delle due rette inflesse, coll' altra FI tendente al dato punto K. C. B. D.

Ciò premesso il Sig. Scorza reca al proposto problema (n. 413) la seguente elegantissima.

Analisi Geometrica.

415. Suppongasi nel cerchio dato FGI (*fig.* 137) inscritto il richiesto poligono FGHIK, i cui lati passino respettivamente pe' punti dati A, B, C, D, ec. E poichè il primo lato FG di esso poligono, ed il secondo GH deggion passare per i dati punti A, e B, dovrà la retta FH delle loro intersezioni formare ad un suo estremo l'angolo dato FHN, colla retta HN tendente al dato punto *h* (*por. prec.*); e sarà dato l'arco FN. Ma cotesta retta HN inflettesi col terzo lato HI, che dee passare pel punto dato C. Dunque per lo stesso Porisma la retta delle intersezioni NI formerà ad un suo estremo un angolo dato NIO colla retta IO tendente al dato punto *i*; e sarà dato l'arco NO, e con ciò l'altro FO, che sarà somma, o differenza de' dati archi FN, ed NO. Così pure questa retta tendente IO inflettesi col quarto lato IK del poligono. Dunque la retta OK delle sezioni formerà ad un suo estremo un angolo dato coll'altra KP tendente al dato punto *m*; e sarà dato l'arco OP, e quindi l'altro FP, che sarà pure somma, o differenza de' due archi dati FO, ed OP. E così appresso, finchè si pervenga ad una tendente PK, la quale inflettesi coll'ultimo lato KF del poligono. In tal caso sarà dato l'arco sottoposto PF, e con ciò l'angolo alla circonferenza FKP, ed il suo conseguente EK*m*.

Dunque si ridurrà il Problema a descrivere sulla data retta E*m* una porzione di cerchio capiente quell' angolo dato.

416. *Cor.* Il Problema del cerchio e de' tre punti resta immediatamente risoluto dal Porisma.

417. *Scol.* Il Sig. Professore Scorza avverte qui molto a proposito in qual caso il problema del cerchio e de' tre punti, o l' altro generale poc' anzi risoluto, sia indeterminato; lo che altri prima di lui non aveva fatto (*Vegg. gli Opuscoli, ec.*)

PROBL. IV.

418. *Dato il cerchio minore ABCD (fig. 138) in un emisfero, dividerlo in un dato numero di archi AB, BC, CD, DA, ec. sicchè i cerchi massimi condotti per gli estremi di ciaschedunò passino per altrettanti punti dati G, H, I, K, ec. nella superficie di esso emisfero.*

Analisi Geometrica.

Suppongasi diviso il dato cerchio ABCD nel modo richiesto: E poichè il primo arco AB è tale, che il cerchio massimo condotto pe' suoi estremi A, e B dee passare pel dato punto G; il raggio OG disteso dovrà incontrare il proposto piano in un punto g, che sarà dato. Ed un tal punto essendo sì nel piano del cerchio ABCD, che dell' altro GBA, dovrà trovarsi nella comune sezione di essi, cioè nella AB. Dunque la corda AB del primo arco dee passare pel punto dato g. Lo stesso s' intenda delle corde degli altri archi successivi BC, CD, DA, ec., che deggion pure passare respettivamente pe' punti dati h, i, k ec. Dunque il Problema si riduce ad inscrivere nel dato cerchio il poligono ABCD, i di cui lati AB, BC, CD

ec. passino per altrettanti punti dati g, h, i, k ec., cioè al problema poc' anzi risoluto (*).

[illegible] Scol. Questo Problema geometrico potrebbe convertirsi in un altro geografico assai leggindro, dal quale potrà rilevarsi l' utilità di tali speculazioni; cioè: *Dato un parallelo terrestre, ed un numero* n *di luoghi nell' istesso emisfero, si vuol dividere tal cerchio nel numero* n *di archi, sicchè i cerchi massimi condotti per gli estremi di ciascheduno passino pe' dati luoghi respettivamente*. E volendo rendere più universale quel geometrico Problema si potrà enunciar quest' altro: *Dato un cerchio in un qualunque solido di rivoluzione, ed il numero* n *di punti nella superficie di esso, dividere tal cerchio nel numero* n *di archi, sicchè le sezioni che conduconsi per gli estremi di ciascun arco, e per un dato punto nell' asse dello stesso solido, passino co' loro perimetri per que' punti dati respettivamente*. In simil guisa: *Dato un cono, ed il numero* n *di punti nello spazio, si potrebbe addimandare d' inscrivere in questo solido una piramide del numero* n *di lati, le di cui facce passino per que' punti respettivamente. O dato un cilindro, ed il numero* n *di punti nello spazio, vuol inscriversi in esso un prisma anche del numero* n *di lati, sicchè le facce di tal solido passino per que' punti respettivi*. E così di altri.

(*) Il sommo Eulero indicò la risoluzione di questo Problema per tre punti dati nella superficie dell' Emisfero. Ma tal indicazione è assai oscura, come può vedersi da questo ragionamento tratto da una sua Memoria dell' Accademia di Pietroburgo 1780. *Concipiatur planum spheram in centro circuli tangens, super quo triangulum planum modo prescripto jam sit constructum, ejusque translatio ad superficiem sphera erit facillima, cum anguli circa centrum in superficie tam plani, quam sphera sint idem, distantia vero punctorum datorum, et angulorum trianguli à centro sphera in tangentes abeant.*

LEMMA

Necessario alla soluzione del seguente Problema.

420. *Se ad un arco circolare DNE (fig. 139) si tiri comunque una tangente AB la quale si arresti tra le altre due tangenti DF, EF dell' arco stesso ne' suoi stremi D, E, e poi congiungasi il centro C co' punti A, B ove questa tangente incontra quelle; l' angolo ACB sarà sempre di una costante grandezza.*

Si tirino a' contatti D, E le rette DC, CE; saranno perfettamente uguali i due triangoli DCA, ACN, onde l' angolo DCA sarà uguale all' altro ACN. Nella stessa guisa si mostra esser l' angolo NCB uguale all' altro BCE. Dunque l' angolo ACB sarà metà del dato DCE, e perciò di una costante grandezza.

PROBL. V.

421. *Ritrovare un punto nell' arco circolare DNE, sicchè per esso condotta la tangente ANB in mezzo alle altre due date DF, FE, sia dato il rettangolo ANB.*

Sia $AB = 2x$

$CN = a$

Ed il rettangolo $ANB = b^2$

sarà $NO = \sqrt{(x^2 - b^2)}$

$AN = x - \sqrt{(x^2 - b^2)}$

$NB = x + \sqrt{(x^2 - b^2)}$

$AC = \sqrt{(a^2 + 2x^2 - b^2 - 2x\sqrt{(x^2 - b^2)})}$

$CB = \sqrt{(a^2 + 2x^2 - b^2 + 2x\sqrt{(x^2 - b^2)})}$

$AC \times CB = \sqrt{((a^2 + 2x^2 - b^2)^2 - 4x^4 + 4b^2x^2)}$

$= \sqrt{((a^2 - b^2)^2 + 4a^2x^2)}$

Finalmente, sarà il triangolo $ACB = ax$

Or essendo dato l'angolo ACB, come si è mostrato, sarà data la ragione del rettangolo di AC in CB al triangolo ACB, che esprimasi per $m : n$, e perciò sarà

$$\sqrt{((a^2-b^2)^2+4a^2x^2)} : ax :: m : n$$

cioè $(a^2-b^2)^2+4a^2x^2 : a^2x^2 :: m^2 : n^2$

e quindi $\frac{m^2a^2}{n^2}x^2 = (a^2-b^2)^2+4a^2x^2$

la quale equazione convenevolmente maneggiata darà una retta quanto la AB, sulla quale se si formi un segmento capiente l'angolo dato ACB, ed in esso poi si adatti la perpendicolare uguale al raggio del circolo, saranno i segmenti della sua corda respettivamente uguali alle tangenti AN, NB, ovvero alle altre AD, BE, e sarà quindi risoluto il problema.

LEMMA

Necessario alla soluzione del seguente Problema.

422. *Se ne' lati TE, RE (fig. 140) del triangolo TER prendansi le due parti TD, RG nella data ragione di* $m : n$, *accanto la base RT, e nella stessa ragione prendasi pur anche DE ad EF; l'interposta GF o sarà nulla, o pure di una costante grandezza.*

Imperocchè se la ragione di $m : n$ pareggi quella di TE : ER, l'intermedia FG sarà nulla, come chiaramente rilevasi. Ma se la data ragione non adeguasse quella di TE : ER, facciasi TE : RQ :: $m : n$, e quindi come TD : RG; sarà perciò TE — TD : RQ — RG :: $m : n$ :: DE : EF, cioè DE : GQ :: DE : EF, e quindi GQ = EF, donde si rileva essere GF uguale alla data EQ.

PROBL. VI.

423. *Dato il punto B fuori del triangolo TER, tirare la retta BG, che dai lati TE, ER ne ascinda, accanto la base, le due parti TD; RG nella data ragione di* m : n.

Analisi Geometrica.

Suppongasi tirata la BG come si addimanda, e prendasi DE : EF :: *m* : *n*; sarà data di grandezza l'intermedia FG, ed unita DF sarà dato l'angolo DFE. Finalmente si tirino per B le rette BA, BC parallele respettivamente a DE, DF.

E poichè sta AG : GE :: AB : ED :: AC : EF, sarà permutando AG : AC :: GE : EF, e dividendo CG : AC :: GF : EF. Adunque le due rette ignote CG, EF hanno la data differenza CE + FG, e sono poi reciproche alle date AC, GF. Dunque è data ciascuna di esse CG, EF.

424. *Scol.* Questo problema forma l'oggetto principale del libro del luogo di risoluzione detto *de sectione rationis* appartenente ad Apollonio Pergeo, ove trovasi risoluto in tutti i casi, e con quell'estensione che usavano gli antichi ne'loro problemi.

CAP. XXII.

Altro metodo del Sig. Fergola per risolvere alcuni problemi di sito, detto di Trasferimento.

425. Allorchè ne' problemi di sito proponesi a: *Formare in un dato punto un angolo rettilineo uguale ad un dato, sicchè sia data una funzione de' suoi lati prodotti, finchè incontrino due linee date di sito*; ed in altri casi analoghi, come tra poco vedremo, proponesi dal Sig. Fergola un nuovo metodo per ben condurre a fine la soluzione di simili problemi, fondato su di un movimento immaginario, ch' è contenuto nel seguente semplicissimo,

PRINCIPIO DI TRASFERIMENTO.

426. *Sien date di posizione le due linee CB, CA (fig. 41), e 'l punto P: tirata comunque da esso punto la retta PA, se volgasi l' angolo PAC, sicchè abbiasi dalla medesima PA descritto un angolo uguale al dato X, sarà dato alla fine di tal movimento il sito della linea mobile CA rispetto all' immobile CB.*

Imperocchè le linee date di posizione sieno rette e s' interseghino in C: si unisca la retta PC, e 'l triangolo CPA trasferiscasi nel sito cP*a*, quando la retta PA abbia col divisato moto rotatorio descritto l' angolo AP*a* uguale al dato X. Ciò posto, l' an-

golo CPA pareggia, o piuttosto è identico all' altro cPa; adunque tolto da essi il comune CPa, resta APa uguale a cPC. Ma l' angolo APa è uguale al dato X: dunque è ben anche dato l' angolo cPC. Ed essendo dati di grandezza si l' angolo Pca, che la retta Pc, sarà dato di posizione il punto P rispetto alla linea retta ca.

427. E questo stesso ragionamento si potrà adoperare, quando la linea mobile CA' sia una curva, o quando tali sieno tutte due le linee CA, CB date di posizione.

428. Per mezzo di questo principio l' intera famiglia di problemi sopra indicata (425) si riduce, come facilmente si rileva, e come vedrassi dalle soluzioni di que' problemi che recheremo qui appresso, a: *Tirare da un punto dato a due linee date di sito una retta, le cui parti tagliate da quelle linee abbiano data la proposta funzione.*

429. Che se fosse data una linea a non già un punto, e quivi ne abbisognasse formare con certa legge angoli dati nella loro somma, o nella loro differenza; o si proponessero altre simiglianti condizioni; il Sig. Fergola ne avverte molto a proposito, che riuscirà anche conducentissimo al Geometra il trasferir di sito certe principali grandezze del problema propostogli, perchè gli si additi qualche sentiero che conduca sicuramente alla soluzione.

430. I vantaggi che ci presenta questo metodo sono, come lo stesso nostro distintissimo Geometra cel dice, che i dati di sito de' problemi della prima famiglia su indicata (425) si travestono per mezzo di questa geometrica trasformazione in dati di grandezza e di ragione, e quindi riduconsi all' impero della moderna

analisi. E gli altri problemi di cui si è discorso nel n. 429, quantunque in simil guisa maneggiati non ricevano pronta soluzione, si trasformano non per tanto in mille modi; onde si generano non pochi problemi affini, che differendo nella sola enunciazione, convengono tutti e nel grado cui ascendono, e nel nodo che comprendono. E quel che molto convien valutare si è, che ogni qual volta per mezzo del divisato metodo si riesca a sciorre tal nodo in un di essi problemi lo che non di rado avviene, si vengono ad ottenere compite soluzioni anche degli altri affini.

PROBL. I.

431. *Dato il punto P fuori del triangolo CMN (fig. 141), condurre per esso le due rette PB, PA, che quivi comprendano un angolo rettilineo uguale al dato X, e tolgano da' lati CM, CN le parti BM, AN, accanto la base, proporzionali alle date* m, n.

Analisi Geometrica

Si unisca la retta PC, e s' intenda il solo triangolo PAC volgersi con moto angolare intorno a P, finchè l' angolo descritto da PA ne' paraggi il dato X, rimanendo immobili CM e PB. Sarà dato di sito il punto P rispetto alla trasferita *ca* (426), e la retta mobile PA resterà adattata sull' immobile PB. Laonde riducesi il problema a tirare dal dato punto P, una retta alle due date CM, *ca* terminate ne' punti M ed *n*, sicchè BM stia ad *an* nella ragione di *m* ad *n*.

COMPOSIZIONE GEOMETRICA.

Constr. Facciasi al dato punto P della retta PC l'angolo CPc uguale al dato X, e Pc uguale alla data PC, che dal punto dato si conduce all'intersezione delle rette date. Si formi parimente all'estremo *c* della retta Pc l'angolo P*cn* uguale al dato PCN, e si tronchi *cn* uguale alla data CN. Dal punto P si tiri la retta PB, che incontrando le due date CM, *cn* ne' punti B ed *a* ne tolga le parti BM, *an* proporzionali ad *m*, *n* (473). Finalmente si construisca al punto P della retta PB l'angolo APB uguale al dato X. Saranno BM, AN nella data ragione di *m* ad *n*.

Dimostr. L'angolo CPc, per construzione, è uguale ad APB; adunque aggiugnendo loro di comune l'altro, CPB n' emergerà l'angolo *c*P*a* uguale all'angolo CPA. Ma si è fatto eziandio l'angolo P*ca* uguale al dato PCA, e Pc uguale PC; sarà dunque *ca* uguale a CA: e quindi la rimanente *an* uguale alla rimanente AN, mentre sono anche uguali le intere *cn*, CN. E poichè per construzione si è fatto BM : *an* :: *m* : *n* sarà anche BM : AN :: *m* : *n*: ma è pure l'angolo BPA uguale al dato X. Dunque dal punto P dato alle rette date CM, CN sono state condotte le altre due rette PB, PA colle condizioni stabilite nel Problema.

432. *Scol.* Collo stesso artifizio si potrebbero risolvere altri problemi affini, come per esempio: *Formare al punto dato P un angolo dato APB, sicchè estendendosi i suoi lati alle rette date di posizione CM, CN, sia data la somma di PB e di PA, o la loro differenza, o il loro rettangolo, o altra di loro funzione.*

E come ognun vede si potrà sempre nella compo-

sizione del problema occultare il principio di trasferimento che ha servito a risolverlo, come si è praticato qui sopra; sicchè un tal principio il quale non ha niente altro di meccanico se non che la semplice maniera di esprimerlo, ciò non ostante nè meno si mostri nella costruzione e dimostrazione di tali problemi.

PROBL. II.

433. *Dati di posizione i due punti A, e B* (*fig.* 142), *e la retta DE; ritrovare in essa un punto C, sicchè condotte le rette AC, CB, la differenza degli angoli ACD, BCE, sia uguale al dato angolo X.*

Soluzione.

Si cali dal punto B la retta BE perpendicolare alla data DE, e 'l triangolo rettangolo CBE si aggiri intorno al cateto CE, talchè l' ipotenusa, che prima giacea al di sopra di esso cateto, ne resti poi al di sotto, come lo è il triangolo CE*b*. E si potragga AC, finchè incontri BE in F.

Ciò premesso i due angoli ACD, BCE sono respettivamente uguali agli altri due FCE, *b*CE: dunque la differenza di questi, cioè l' angolo FC*b* sarà uguale alla differenza di quelli, val quanto dire all' angolo dato X. Per la qual cosa sarà dato l'angolo FC*b*, e 'l suo conseguente *b*CA. Se dunque il punto dato A congiungasi coll' altro *b*, ch' è pur anche dato, e su di A*b* si formi un segmento circolare capiente un angolo uguale al conseguente del dato X l' arco di esso segnerà nella retta DE il punto cercato C.

CAP. XXIII.

PROBLEMI DIVERSI DELLE APPLICAZIONI PROPOSTI, ED ELEGANTEMENTE RISOLUTI DAL SIG. FERGOLA.

434. Tra i libri del luogo di risoluzione degli antichi Geometri ve n' eran due di Apollonio Pergeo che seguivano quelli tanto celebri, e tanto desiderati de' Porismi di Euclide, e forse anche gli altri de' *luoghi piani* dello stesso Apollonio; ed essi eran detti *de inclinationibus*, poichè i problemi che vi si risolvevano avevano generalmente per oggetto di: *Inclinare tra due linee date di posizione una retta data di grandezza la quale passasse per un dato punto*, del qual problema generale n' è un caso quello da noi esposto al *n.* 383. E questo problema generale come cel dice Pappo era distinto in centoventicinque altri che formavano il complesso de' due suddetti libri, oltre a 38 lemmi. Tali problemi come facilmente rilevasi, e come Pappo stesso lo accenna, erano altri piani, altri solidi, ed altri lineari. I due libri di Apollonio però non par che ne contenessero alcuno di quest' ultima famiglia, sicchè la dottrina *delle Inclinazioni* restava per questa parte incompleta. Non è questo il luogo da congetturare perchè il saggio Geometra di Perga si fosse astenuto dall' estender oltre queste sue ricerche, e basta solo il far rilevare che il nostro Sig. Fergola nella sua dottissima opera inedita *dell' Arte d' Inventare in Matematiche*, dopo essersi convenevolmente occupato di questa par-

te del luogo di risoluzione degli antichi, ha voluto anche proceder oltre in supplire l'ultima su mentovata parte de' problemi delle Inclinazioni, il che ha eseguito in modo da non solamente darci eleganti soluzioni di molti difficilissimi problemi, e di prepararne così il risolvimento di molti altri a' quali questi possono servire come principj di riduzione; ma anche queste tali soluzioni sono in nuova guisa, e sì maestrevolmente eseguite, che problemi solidi, ipersolidi, ed anche trascendenti, nulla perdendo di lor natura, risolvonsi a guisa de' Problemi Piani, col solo condurvi rette, e descrivervi cerchi! E quello che anche molto ne interessa di avvertire si è, che questi tali problemi sono di natura a non ricevere affatto soluzioni per mezzo della moderna analisi, o pur quella che col massimo stento per talun di essi si può ottenere, quando siasi ostinato a così volerla, conduce a risultati incostruibili; e perciò di nessun conto ove trattasi di geometriche ricerche.

Or io non soffrendo, che sì nobil ramo di artifizj geometrici atto ad estender non poco il poter di questa scienza restasse più lungo tempo ascoso, forte insistei, perchè l'autor di esso mi permettesse di pubblicarlo, al che avendolo finalmente persuaso inserii tali sue ricerche nel volume di Opuscoli Matematici più volte da me citati. Ed or siccome la natura di sito di questi tali problemi, e la loro importanza, come poco fa diceva, in altre ricerche di simil genere, gli riconducono nell'argomento del presente Trattato, ho stimato opportuno di qui per ultimo inserirli, rinviando coloro che vorranno conoscerne il complemento a' suddetti Opuscoli.

PROBL. I.

435. *Dato di posizione un angolo rettilineo, ed una qualunque curva algebrica, o trascendente; applicare tra questa curva, ed un lato di quell' angolo una retta data di grandezza, e parallela all' altro lato.*

Soluzione.

Sia EDG (*fig.* 143) la curva data, ABC il dato angolo rettilineo, e tra BA, ch' è un suo lato, e la detta curva EDG debbasi adattare una retta uguale alla data M, e parallela all' altro lato BC del medesimo angolo.

Dal vertice B del dato angolo, e sul detto lato BC si tronchi la parte BN uguale alla data M, e da N poi si conduca la ND parallela all' altro lato BA di esso angolo. Se tal retta incontri la proposta curva, il Problema sarà solubile. La incontri dunque in D, e si compia dalle BN, ed ND il parallelogrammo ABND. Dico esser la retta AD quella che si domanda.

La verità di quest' asserzione ben si comprende dal proposto artifizio: ed ognuno potrà supplirvi, che vi possano esser più punti soddisfacenti al quesito: cioè che debba esser *n* il più gran numero di cotesti punti, se *n* sia il grado dell' equazione della curva EDG; quando ella sia algebrica.

436. *Cor.* Se la retta da doversi applicare tra la curva EDG, e la retta AB debba esser data di grandezza, e debba poi passare per lo dato punto P; i punti soddisfacenti al quesito saranno marcati nella data curva EDG da una Concoide, che abbia per assintoto la data retta AB, per polo il punto P, e per intervallo la data

retta M. E ciò devesi assolutamente praticare, quando la data curva EDG sia trascendente.

437. *Scol.* Quando diremo esser data *una qualunque curva*, senza porvi altro aggiunto, dovrà intendersi, che questa possa essere algebrica di qualunque ordine, o comunque trascedente. E taluno dovrà supplirvi col suo pensiero, ch' ella sia anche data di *specie*, e di *grandezza*.

PROBL. II.

438. *Dato di posizione un angolo rettilineo, ed una qualunque curva; applicare tra questa linea, ed i lati di quell' angolo una retta parallela ad un' altra data di sito, sicchè ne resti divisa in una ragion data.*

Soluzione

Sia ABC (*fig.* 144) il dato angolo rettilineo: EDG la curva data: *ac* la retta data di posizione, cui debbasi condurre una parallela, che vi resti divisa in una ragion data dalle tre linee BA, BC, ed EDG.

La retta *ac* prodotta, finchè incontri i lati di quell' angolo, dividasi nel punto *d* in quella ragion data: e la retta B*d*, che unisce i punti B, e *d*, si protragga insino alla data curva EDG. Quella retta dovrà segnare in questa curva, se il Problema non sia impossibile, i punti ad esso soddisfacenti.

Imperocchè conducendo per uno di cotesti punti D la retta ADC parallela alla data *ac*, ben si comprende dover essere AD : DC :: *ad* : *dc*.

439. *Cor.* 1. Al presente Problema immantinente riducesi quest' altro: *Applicare tra le proposte linee* BA, BC, *ed* EDG *una retta* AC, *la qual vi resti divisa*

in una data ragione, ed ella in una data ragione ancor ne divida i lati dell' angolo dato ABC, *e verso del di lui vertice*. Imperocchè la seconda di queste due condizioni ne dichiara dover essere la richiesta AC parallela ad una retta data di sito: onde un tal Problema rimettesi a quello della presente Proposizione.

440. *Cor.* II. E se la retta da applicarsi fra quelle linee date debba troncar da' lati dell' angolò dato le due parti AM, CN in una data ragione, e verso de' punti M, ed N dati in essi lati, e le parti AD e DC di cotal retta vi debban essere in una data ragione; il punto D dovrà allogarsi in una retta data di posizione (397). Dunque gl' incontri di questa retta colla data curva EDG saranno i punti soddisfacenti al Problema. E per ciascuno di essi converrà condurre una retta, la qual vi resti divisa dalle altre due BA, BC nella ragion proposta. E ciò è di facile ottenimento.

441. *Cor.* III. *Vuol disporsi infra le dette linee* BA, CB, *ed* EDG *la retta* AC, *che vi resti divisa in una data ragione, e vi tronchi il triangolo* ABC *dato di grandezza*. In tal caso la seconda di queste due condizioni indica doversi il punto D appartenere ad un' iperbole di una data potenza, i di cui assintoti esser deggian le due rette BA, BC. Dunque, se D sia un degl' incontri di quest' iperbole colla data curva EDG, da un tal punto si dovrà condurre la retta ADC, talchè le sue parti AD, e DC sieno in una ragion data. Lo che facilmente può eseguirsi.

442. *Cor.* IV. Propongasi di: *Adattare fra queste tre linee BA, BC, ed EDG una retta come AC parallela alla data* ac, *talche il rettangolo ACD sia dato*. In quest' altro caso sarà anche dato il rettangolo di DC in CB, per esser dato di specie il triangolo ABC. Dunque condotta per lo punto B la BQ parallela alla *ac*,

e descritta un' Iperbole cogli assintoti BQ, BC, che abbia una potenza uguale al rettangolo di DC in CB, una tal curva dovrà segnare nella data EDG i punti soddisfacenti al Problema.

443. *Cor.* v. Finalmente: *Dal dato punto P vuol condursi fra le dette linee BA, BC, ed EDG la retta PA, sicchè le sue parti, che frammezzan quelle linee, cioè le AD, e DC, sieno in una ragion data*. In tal caso, come lo ha dimostrato il Sommo Newton nella sua Aritmetica Universale, il punto D appartiensi ad una data Iperbole. Dunque le intersezioni di questa linea colla data EDG vi segneranno i punti soddisfacenti al quesito, dovendosi congiungere ciascuno di essi con quel dato punto P per una retta.

444. *Scol.* Ismaele Bulialdo, che fu il primo a rischiarare i Porismi Euclidei, quivi volle risolvere il seguente Problema: „ *Condurre un' ordinatà in un semicerchio, la qual vi restasse divisa in una data ragione dal diametro, dalla semicirconferenza, e da una corda condottavi per un estremo del diametro suddetto*. Or chi non vede esser questo Problema assai più ristretto di quello, che contiensi nella presente Proposizione. E si vedrà poi con maraviglia, ch' ei lo disciolse per una via men semplice della quassù tenuta. Intanto più conseguenze, o più Problemi si potrebbon trarre dall' anzidetta Proposizione, i quali si ometteranno volentieri, per poterne recare un' altro problema sopra un soggetto affine, ed il quale richiede una più artificiosa analisi.

PROBL. III.

445. *Dato di posizione un angolo rettilineo, ed una qualunque curva; condurre da un punto di questa due*

rette date su i lati di quell' angolo, talchè esse o comprendano un angolo di data grandezza, o facciano angoli dati co' lati dell' angolo proposto da principio.

La prima parte di questo Prob. è stata già risoluta nel *n.* 400 del presente Trattato.

PART. II. Suppongansi esser dati gli angoli DCB, DAB (*fig.* 125), che forman le date incidenti DC, DA co' lati del dato angolo ABC. E poichè nel triangolo ABO son dati per supposizione i due angoli DAB, ABO, ne sarà dato il terzo, cioè l' angolo AOB, o il suo uguale COD. Ma è anche dato l' angolo DCO. Dunque vi sarà dato il terzo CDA. E la presente indagine si ridurrà a quella del caso precedente.

446. *Cor.* I. Di qui comprendesi chiaramente, come un triangolo dato di specie, e di grandezza potrebbesi adattare frà due rette, ed una qualunque curva data di posizione, sicchè gli angoli di quella figura cadano su queste linee respettivamente. Ed un tal Problema è assai più generale di quell' altro, che il Sommo Newton disciolse ne' Principj Matem. della Filos. Nat. Lemm. XXVI.

447. *Cor.* II. Inoltre da' Principj di risoluzione, che impiegansi nel presente Problema, si potrà risolvere un altro Problema Newtoniano più generalizzato (*): cioè *Date di posizione due rette, ed una qualunque curva; applicare frà queste tre linee una retta, sicchè le sue parti interposte sieno date di grandezza.*

E la medesima Analisi basterebbe a risolverne il Porisma III. de' Probl. di Sito (387).

(*) Probl. 22. Aritm. Univers.

LEMMA

448. *Se diasi di posizione l'angolo NLM (fig. 145) e 'l punto C, da cui conducasi una qualunque segante CP, a' lati di detto angolo, e da' punti P, ed R delle sezioni si tirino le rette PA, ed RB a' dati punti A, e B posti a diritto con C; io dico, che le due inflesse AP, BR convergan sempre in una retta data di posizione.*

Il punto C, per brevità di dire, si chiamerà Polo di quell' angolo, e la retta AB di lui direttrice.

Dal punto B conducasi la BD parallela all' inflessa AP: e poi dal punto Q, ove uniscansi amendue le inflesse, si meni la EQF parallela alla direttrice AB, incontrandone in E, ed F i lati del dato angolo; e questi in H, G ne seghino la detta direttrice. Sarà, pe' triangoli simili CBD, CAP, CB : CA :: BD : AP.

Ciò posto la ragione di BD ad AP componesi da quella di BD a PQ, e di PQ ad AP, come l'è noto. E la prima di queste componenti è quanto quella di BR ad RQ, pe' triangoli simili BRD, PRQ, o quanto la di lei uguale di BG a QF, per la similitudine degli altri due triangoli RBG, RQF. Dunque sarà BD : PQ :: BG : QF. Inoltre la seconda di dette componenti, cioè la ragione di PQ ad AP, l'è pure uguale a quest' altra di QE ad AH, a cagion de' triangoli simili PHA, PEQ. Dunque la ragione di CB a CA sarà composta dalle due di BG a QF, e di QE ad AH, cioè scambiando i conseguenti di queste due altre componenti, sarà CB : CA :: (BG : AH) (QE : QF).

Il perchè essendo data la ragione di CB a CA, e l'altra di BG ad AH, per esserne dati i loro termini, dovrà esser benanche data l'altra ragion compo-

nente, cioè quella di QE a QF: e 'l punto Q dovrassi allogare in una retta data di posizione, che dee passare per lo vertice L dell' angolo dato.

449. *Cor.* Discostandosi all' infinito il Polo C da ciascun de' due punti dati A, e B, nel qual caso l'interposta PR divien parallela alla direttrice AB, diverrà d' uguaglianza la ragione di CB a CA; e dovrà quindi risultare QE : QF :: AH : BG. Onde in una più facil maniera potrà rinvenirsi in questo caso la locale LQ del concorso delle inflesse.

PROBL. IV.

450. *Dati di posizione un angolo, due punti, ed una qualunque curva; inflettere da que' due punti a questa curva due rette, sicchè la retta, che unisce i concorsi delle due inflesse co' lati dell' angolo dato, sia parallela alla direttrice, o con essa converga ad un punto dato.*

Soluzione.

I punti dati sieno A, e B, NLM sia l' angolo dato, TQS quella qualunque curva, e vogliansi inflettere le due AQ, BQ ad essa, talchè la PR, ch' è tra le sezioni delle inflesse co' lati di quell' angolo, sia parallela alla direttrice AB, o converga con essa nel dato punto C. Per ciò ottenere sia la retta LQ (*lem. prec.*) la locale de' concorsi di coteste inflesse: ed una tal retta incontri la data curva TQS in uno, o più punti (altrimenti sarebbe impossibile un tal Problema); Io dico, che ciascun di questi punti debba esser soddisfacente al quesito. E ciò è di per se manifesto.

PROBL. V.

451. *Dato di posizione un punto, una Sezione Conica, ed un' altra qualunque curva, condurre da quel punto nella prima di queste curve due seganti, sicchè le congiungenti delle loro sezioni convergano in un punto dell' altra curva; ed oltre a ciò ne sia dato un angolo dell' emergente quadrilineo.*

SOLUZIONE

Il dato punto sia A (*fig.* 146), CFED la proposta sezione conica, e BT l' altra curva data. Dal punto A conducansi le due tangenti alla sezione conica CFED; e sia LB la retta fra contatti, la quale seghi in B la curva BT. Sulla retta AB si formi un segmento di cerchio capiente l' angolo dato, o il suo conseguente, secondochè il detto angolo debba uguagliare l' angolo D, che rivolge l' apertura alla retta AB, (e lo stesso dicasi del suo opposto CFE nel quadrilineo CFED), o vi debba uguagliare qualunque degli altri due rimanenti. E supposto, che cotesto segmento incontri in D la data sezione conica, vi si conducan le rette AD, BD, si unisca l' altra AE, ed in fin si congiunga la CF. Questa retta dovrà convenire colle due DB, LB nel medesimo punto A, come costa da' conici. E ne resterà in tal guisa risoluto il Problema.

PROBL. VI.

452. *Date di posizione due qualunque curve; applicare tra' perimetri di esse una retta uguale ad una retta data di grandezza, e parallela ad un' altra data di posizione.*

Soluzione.

Tra le curve date di sito ANB, QSD (*fig.* 147), vuol applicarsi una retta quanto la data R, e parallela all'altra CD data di posizione. Per ciò ottenere la retta AC dinoti l'asse della curva ANB, e condotta da un qualunque punto A di tal retta la Aa parallela alla CD, ed uguale alla data R, si meni per a la retta ac parallela al detto asse. E poi d'intorno ad ac intendasi la curva anb identica alla data ANB, e similmente posta, sicchè le ordinate NM, ed nm, che in esse corrispondono alle uguali ascisse AM, am, non solamente sieno uguali, ma vi sieno benanche per diritto (188). Inoltre da un punto n, ove segansi le curve QSD, anb, (lo che dee assolutamente verificarsi, se tal problema sia possibile), si conduca la nN parallela alla CD: dico esser questa la retta addimandata.

Imperocchè essendo uguali, come ora si è detto, le due nm, ed NM, aggiuntavi la mN di comune, sarà l'interposta nN uguale alla mM, cioè ad aA, o alla data R. Ma è anche la medesima nN parallela alla CD data di posizione: dunque si è soddisfatto alle condizioni del problema.

PROBL. VII.

453. *Dato di posizione un punto, una retta, ed una qualunque curva; applicare per quel punto tra queste linee una retta, sicchè le sue parti, che restano tra il detto punto, e ciascuna delle linee date, sieno in una data ragione, o vi comprendano un rettangolo dato.*

SOLUZIONE.

PART. I. Il punto N (*fig.* 148), la retta AC, e la curva qualunque DFE sien date di posizione, e vogliasi per N condurre tra le dette linee una retta, come la MNF, sicchè sieno le NM, ed NF nella data ragione di m ad n.

Dal punto N si abbassi la NB perpendicolare alla data AC, e protrattala verso la curva DFE, sinchè stia BN : NG :: m : n, si tiri per G la GF parallela alla data AC: e poi da ciascun punto F, ove tal parallela incontra la detta curva (lo che dee aver luogo, se il Problema sia possibile), si tiri al dato punto N la FNM. Sarà, pe' triangoli simili NBM, NGF, MN : NF :: BN : NG :: m : n.

PART. II. Si prolunghi la detta NB insino al punto Q, talchè il rettangolo BNQ uguagli il dato rettangolo, che qui dinotiamo per A^2. E poi sulla NQ, come diametro, si descriva il cerchio QFN, che dovrà in qualche punto F incontrar la data curva DFH, se sia risolvibile un tal Problema. E finalmente da F conducasi per N la retta FNM, ed insino alla data retta AC. Sarà il rettangolo FNM uguale ad A^2.

Imperocchè congiunta la QF, dovranno essere equiangoli, e quindi simili i due triangoli QFN, NBM. Onde dovendo essere QN : NF :: NM : NB, sarà il rettangolo FNM uguale a QNB, cioè ad A^2.

PROBL. VIII.

454. *Dato di posizione un punto, un cerchio, ed una qualunque curva; tirare da quel punto una segante su queste linee, sicchè coteste incidenti sieno in una data ragione, o contengano un rettangolo dato.*

SOLUZIONE.

PART. I. Sia P (*fig.* 149) il punto dato, BQF il dato cerchio, ed ARG quella qualunque curva: e da P vuol condursi una segante PQ, talchè le incidenti PQ, PR sieno come m ad n.

Si unisca il centro C del dato cerchio col punto P; e divisa la PC in S, sicchè stia PC : PS :: $m : n$, si prenda la d quarta proporzionale in ordine alle m, n, ed al raggio di esso cerchio: poi col centro S intervallo d si descriva un cerchio, che dovrà intersecare la data curva ARQ ne' punti soddisfacenti al Problema, s' ei sia solubile.

Dim. Sia R un di cotesti punti, ed unita la SR, si meni da C la CQ parallela alla SR, e si congiunga la PQ. Questa retta dovrà passare per R. Conciossiachè se la PQ incontrasse la SR in un altro punto r, sarebbe per la 4. El. VI., CP : PS :: CQ : Sr: ed essendo per costruzione CP : PS :: CQ : SR, sarebbe Sr uguale ad SR, ch' è un assurdo. Dunque la PQ dovrà passare per lo punto R, e starà PQ : PR :: PC : PS :: $m : n$.

PART. II. Se il rettangolo RPQ debba esser dato, ei dovrà serbare una data ragione al rettangolo BPQ, ch' è dato per la natura del cerchio. Dunque esprimasi per $r : t$ cotesta ragion data; sarà $r : t$ :: PR × PQ : PB × PQ :: PR : PB. E 'l presente caso ridurrassi al precedente.

455. *Scol.* Se il dato punto P sia l' intersezione della data curva ARC col cerchio BPQ (*fig.* 150) potrà recarsi quest' altra soluzion al Problema.

Conducasi per P una qualunque corda PG in detto cerchio, e prodottala in H, sicchè stia PG : PH :: $m : n$, si descriva sulla PH il segmento cir-

colare PRH simile all' altro PQG, che intersecherà in un qualche punto R la curva ARC. Si unisca la RP, e si prolunghi insino al cerchio: sarà questa la retta cercata. Imperocchè, condotte le due rette RH e QG, ben si vede essere equiangoli, e quindi simili i due triangoli PQG, PRH. Dunque sarà PQ : PR :: PG : PH :: $m : n$.

PROBL. IX.

456. *Dati di posizione un punto, un cerchio, ed una qualunque curva; condurre da quel punto due incidenti su queste curve, talchè esse comprendano un angolo dato, e sieno direttamente, o reciprocamente proporzionali a due rette date.*

Soluzione.

Part. I. Dal dato punto P (*fig.* 159) si voglian condurre sul circolo bqf, e sulla curva qualunque ARG le due incidenti Pq, e PR, che comprendano un angolo uguale al dato V, e sieno nella ragion data di m ad n.

Analisi Geometrica.

Suppongansi esser Pq, PR le rette addimandate.

Si unisca il centro c del dato cerchio col punto P, e poi si faccia l'angolo cPC uguale al dato V, CP uguale a cP, e col centro C intervallo cq si descriva il cerchio BQF, che sarà dato di posizione rispetto al punto P, ed alla curva ARG. Sicchè tirando dal punto P nel cerchio BQF l'incidente PQ uguale all'altra Pq, quella dovrà restarne adattata sulla PR. Imperocchè congiunta la CQ i due triangoli CPQ, cPq, per

la 8. El. 1. avranno uguali gli angoli CPQ, cPq; onde aggiungendo ad essi di comune l' angolo QPc; dovrà risultarne l' angolo CPc uguale all' altro QPq. Ma il primo di questi due angoli è uguale al dato V, cui si è supposto uguale l'angolo RPq. Dunque sarà l' angolo QPq uguale all' angolo RPq; la PR sarà coincidente colla PQ: e la presente indagine si ridurrà a quella del I°. Caso del Problema precedente.

Lo stesso intendasi per la Parte II. di un tal Problema.

457. *Scol.* Questo Problema, ch' è un de' più facili tra quanti il Sig. Fergola ne ha raccolti nell' Opuscolo concernente il presente argomento delle *Applicazioni*, poteva ricevere anche, com' ei lo accenna, pronto risolvimento da' luoghi Piani di Apollonio, che per le seguenti ragioni ha egli ricusato di usare. Prima perchè la sua Analisi Geometrica ha un cammino assai breve. Di poi perchè l' era suo disegno di recar delle algebriche equazioni, affin di dimostrare in pochi giri di Analisi cotesti Luoghi di Apollonio, ed altri più rilevanti. E finalmente col suo Principio di *Trasferimento* egli suole scortar molto le dimostrazioni geometriche de' detti luoghi. Onde il rapportarli sarebbe stato un superfluo lavoro.

LEMMA

458. *Se da un punto P (fig. 151) preso fuori la curva RAN, qualunque ella siasi, vi si conduca un' incidente PN, la quale si divida in* n *in una ragion data; cotesto punto* n *dovrà allogarsi nell' altra curva* ran *simile alla proposta RAN.*

E se le due PN, e Pn debbano esser reciproche a due rette date; il punto n *della divisione dell' inciden-*

te PN si dovrà ritrovare in una curva dissimile alla proposta RAN.

DIMOSTRAZIONE.

PART. I. Dal punto P si conduca la PC, come ne piace, che però sia una comoda direttrice della proposta curva RAN. Onde chiamando v, e z le due qualunque coordinate ortogonali PM ed MN di essa, l'equazione di tal curva, s'ella sia algebrica, potrà generalmente esprimersi per.

$$a+bv+cz+dvz+ev^2+fz^2 \ldots\ldots + Uz^n=o \qquad \text{A}$$

Ed abbassando dal corrispondente punto n la nm perpendicolare alla PC, si ponga $Pm=x$, ed $mn=y$, e poi si dinoti per $h:1$ la costante ragione di PN : Pn, o la sua uguale di PM : Pm. E poichè sta MN : mn :: PN : Pn :: PM : Pm, sarà $h:1::z:y$, ed $h:1::v:x$. Vale a dire dovrà essere $z=hy$, ed $v=hx$. Sicchè sostituendo nell'Equazione A cotesti valori delle z, ed v, e fattevi le debite riduzioni, con porvi benanche $\frac{a}{h}=\alpha$, ella si cangerà in quest'altra

$$\alpha+bx+cy+dhxy+ehx^2+fhy^2 \ldots\ldots + Uh^{n-1}y^n=o, \qquad \text{B}$$

Che ben si comprende esser simile ad A, non che del medesimo di lei grado.

E se mai la data curva RAN sia trascendente, e la sua equazione per le coordinate ortogonali PM, ed MN esprimasi per $f(v,z)=o$; quella della curva nar dovrà dinotarsi per $f(hx,hy)=o$. E tanto in quel caso, che in questo s'intenderà esser simili le due curve RAN, ed ran.

PART. II. Che se il rettangolo di PN in Pn debba esser dato, che dinoteremo per K^2, colle proposte variabili ci potrem guidare nel seguente modo a rinve-

nir l' equazione della curva *nar*. Cioè a dire essendo $Pn = \sqrt{(x^2+y^2)}$, e quindi $PN = \frac{K^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$; sarà la ragione di Pn a PN uguale a quella di x^2+y^2 a K^2 Ma pe' triangoli simili PMN, Pmn sta $PM : Pm :: PN : Pn$, ed $MN : mn :: PN : Pn$. Dunque sarà $v : x :: K^2 : x^2+y^2$, e $z : y :: K^2 : x^2+y^2$: cioè a dire sarà $v = \frac{K^2x}{x^2+y^2}$, e $z = \frac{K^2y}{x^2+y^2}$. Laonde, sostituendo nell' Equazione A questi valori delle v, e z, ne verrà la seguente Equazione

$$a + \frac{bK^2x}{x^2+y^2} + \frac{cK^2y}{x^2+y^2} + \frac{dK^4xy}{(x^2+y^2)^2} \ldots + \frac{UK^{2n}y^n}{(x^2+y^2)^n} = 0, \quad C$$

la quale si riduce a quest' altra

$$a(x^2+y^2)^n + K^2(bx+cy)(x^2+y^2)^{n-1} \ldots + UK^{2n}y^n = 0, \quad D$$

Ove ben si comprende esser l' Equazione D di doppio grado dell' altra A, e potersi da quella inversamente rilevar quest' altra, con sostituire in D la grandezza v in luogo di $\frac{K^2x}{x^2+y^2}$, e l' altra z invece di $\frac{K^2y}{x^2+y^2}$.

E, se la curva NAR sia trascendente, e la sua equazione si dinoti per $f(v, z) = 0$; quella della curva *nar* ne sarà anche trascendete, e verrà dissimile alla precedente con sostituirvi i recati valori delle v, e z.

459. *Cor.* 1. La curva *nar*, che derivasi dalla proposta linea NAR col prenderne in ciascuna incidente PN la parte Pn direttamente, o reciprocamente proporzionale all' anzidetta incidente, può dirsi *la derivata della linea NAR per diretta, o per reciproca divisione*. Ed una tal derivata sarà algebrica, se tal ne sia la proposta linea NAR, come rilevasi dalle addotte equazioni. Quindi è, che, dinotando per m il grado della derivata, dovrà esser, come l' è noto dalla Geometria Sublime, $\frac{1}{2}(m^2+3m)$ il numero de' punti, pe' quali

dee passare tal derivata per averne una determinata posizione. E' ne sarà data la sua posizione e la natura, se diasi cotesto numero di punti, e la sua caratteristica equazione.

460. *Cor.* II. Una tal derivata può concepirsi esistente nel sito natio *nar*, o nell' altro *n' a' r'*, ch' ella abbiasi acquistato col girarne angolarmente intorno al punto P, finchè la PC abbiavi descritto un dato angolo ϕ. E' tanto in quel sito, che in quest' altro, la potrem concepire generata per assegnazione di punti.

461. *Cor.* III. Se una tal derivata sia algebrica, o ch' ella esista nel sito natio *nar*, o nell' altro *n' a' r'* di trasferimento, può talora con moto organico descriversi comodamente. E sarà bene su tal proposito osservare tutto quel, che saggiamente sulla descrizione organica delle curve (*) vien rapportato da' sommi Geometri il Cavalier Newton, Colin Mac-Laurin, e Braikenridge.

(*) Il Sommo Newton nel proporre l' organica descrizione delle curve algebriche si valse ingegnosamente del moto di due angoli dati intorno a' loro vertici. Cioè a dire se due angoli girino intorno a' vertici loro; (rimanendone invariata la quantità di ciascheduno), e l' intersezione di un lato di un angolo con un lato dell' altro facciasi percorrere una retta data di posizione, che non passi per alcuno de' vertici de' detti angoli; l' intersezione degli altri due lati vi segnerà una sezione conica. Se quella si trasporti per una curva conica, quest' altra dovrà segnarne una linea di terz' ordine. E così più oltre, ove convien supplirvi alcune limitazioni. Intanto il Sig. Maç-Laurin aggiunse le dimostrazioni a questi Teoremi, e poi rese più agevoli coteste ricerche. E 'l Sig. Braikenridge le ampliò mirabilmente coll' introdurvi tre poli, intorno a' quali si aggiran tre rette; e dalle linee, in che si muovon due di queste tre intersezioni, ei ne rileva la linea descritta dalla rimanente.

462. *Cor.* IV. E se la derivata per division diretta, o ch' ella sia algebrica, o trascendente, vogliasi descrivere organicamente, basterà a tal oggetto l' adoperare il solo Pantografo.

463. *Cor.* V. La derivata di una curva algebrica per la divisione diretta delle incidenti è il più semplice caso del trasmutamento di una curva in un' altra dello stesso genere di essa. Sulla qual cosa è ben rileggere le ricerche fatte dal sommo Newton ne' Principj Matematici della Filosofia Naturale.

464. *Scol.* La teoria de' Luoghi Piani di Apollonio resta compiutamente dimostrata, sol che si proponga l' Equazione A per la retta, e per lo cerchio, e vi si usino le addotte trasformazioni. Ed anzi dall' equazioni A, B, C, D può intendersi la teoria, che a' Luoghi Solidi, ed Ipersolidi debbane per tali incidenti convenire.

PROBL. X.

465. *Date di posizione due qualunque curve, ed un punto fuori di esse; condurre da questo su quelle due incidenti, che comprendan fra loro un angolo dato, e sieno direttamente, o reciprocamente proporzionali a due rette date.*

Soluzione.

Part. I. Sieno NAR (*fig.* 151), e QBS le due curve date; fuori delle quali sia il dato punto P, dal quale debbansi ad esse condurre due incidenti, che comprendano un angolo dato ϕ, ed abbiano una ragion data. La curva *nar* sia la derivata dalla proposta NAR per division diretta, ed ella si concepisca trasferita nel sito avventizio *n' a' r'*, sicchè l' angolo CPC' sia uguale

al dato ϕ: e 'l punto n' sia uno degl' incontri della curva $n'a'r'$ colla data QBS, se il Problema sia possibile. Si unisca la retta Pn', e si formi nel punto P della n'P l' angolo n'Pn uguale al dato ϕ; dico esser le due rette Pn', e PN quelle che si richieggono.

Imperocchè la retta n'P è uguale (*) all' incidente Pn nella derivata nar. Ma l' è poi PN a Pn nella ragion data: dunque in tal ragione dovrà stare la PN alla Pn', le quali comprendendo benanche un angolo uguale al dato ϕ, saranno le richieste.

Part. II. Lo stesso artifizio s' impieghi a risolvere il proposto Problema, quando le richieste incidenti, oltre al comprendere un angolo dato, debban contenere un rettangolo dato. Ed una simigliante dimostrazione dovrà convincerne della verità della costruzione.

Cor. Un simile artificio potrà adoperarsi, se mai si proponga di condurre le incidenti PN, Pn', che contengano un angolo dato, ed una di esse sia una certa funzione dell' altra.

FINE.

(*) Leggasi la prec. Prop., ed i Coroll. I. e II.

NOTE GEOMETRICHE

AL PRESENTE TRATTATO.

Queste note, come già dissi nell' Introduzione, hanno per oggetto o alcune ricerche geometriche, non già di sito, affini ad altre cose trattate in quest' opera, o a mostrare qualche teorìa geometrica che risulti dall' insieme di più problemi risoluti, o finalmente a rischiarare taluna cosa che forse a' principianti potrebbe riuscire alquanto difficile a rilevarsi.

NOTA (A) alle Propp. XXII, XXIII, ed al Teor. ch' è dopo questa nel N°. 71.

1. Euclide ne' primi sei libri de' suoi Elementi diede la maniera di descrivere un triangolo dati i tre lati che lo dovevano comprendere, ed in altre proposizioni stabilì poi i principj per costituirlo, prendendovi per determinanti di esso, o due lati intorno ad un angolo, o due angoli adjacenti ad un lato, o due lati e l' angolo opposto ad un di essi, o finalmente due angoli e 'l lato ad un di questi opposto. Dopo ciò i Trigonometri esibirono le regole per determinare in ciascuno di questi casi dalle tre parti del triangolo date nel valore, da essi così dette, il valore delle rimanenti: sicchè ogni triangolo rettilineo ne' succennati casi si può o geometricamente costituire,

o pure trigonometricamente risolvere. Egli però non fece lo stesso dell' angolo solido compreso da tre angoli piani, essendosi limitato solamente a costituirlo con tre angoli piani dati, non tenendo conto, come fuori del suo scopo, degli altri casi in cui fossero dati. II°. Uno di tali angoli piani, e gli angoli in cui gli altri due s' inclinavano respettivamente al piano di quello. III°. Due angoli piani che lo comprendono e l' inclinazione de' piani in cui essi si ritrovano. IV°. Due degli angoli che lo comprendono e l' inclinazione del piano del terzo a quello di uno de' dati. V°. Un angolo, e le inclinazioni del piano di un altro al piano del dato, ed a quello del terzo angolo non dato. VI°. Finalmente le tre inclinazioni de' piani in cui esistono i tre angoli che lo comprendono. Val quanto dire che il triangolo sferico al quale corrispondono i casi sopra enunciati, come facilmente ognun rileva (*), è risolvibile in ciascuno di essi colle ovvie regole della Trigonometria Sferica; ma non era geometricamente construibile che nel solo caso che fossero geometricamente dati i suoi tre lati.

2. Or le determinazioni delle Prop. XXII, XXIII, e del Teor. che segue quest' ultima (71) suppliscono alla geometrica costituzione dell' angolo solido, e quindi del triangolo sferico ne' casi sopra enunciati al n°. II°, III°. e IV°.; e per gli altri due casi eccone le convenienti construzioni.

(*) Vegg. la nostra Trig. Sferica, in fine del Corso di Geometria Elem. e Subl.

CASO V.

3. *Sieno dati l' angolo aAL (fig. 14), e quelli ne' quali inclinasi il piano LAa sì al piano dell' angolo dato, che a quello del terzo angolo aAa'.*

Fatto lo stesso apparecchio del caso 2. della Propos. XXII. si conchiuderà come nel principio del cas. 2. della XXIII. che prendendo di data grandezza la A'C, verrà ad essere anche data la C'c, e la *cb*; che perciò il punto *b* si apparterrà ad una circonferenza di cerchio descritta col centro *c*, intervallo *cb*, alla quale se si tiri per A' la tangente A'*a*, si otterrà così l'angolo LA'*a*. E l' altro *a*'A'*a* potrà ottenersi costituendo il triangolo C*b*A' in cui sono dati i tre lati.

CASO VI.

4. La risoluzione di quest' ultimo caso, cioè quando si voglia: *Determinare i tre angoli che comprendono un angolo solido dati quelli delle inclinazioni de' piani di essi, per indi costituirlo*, dipende dal seguente

LEMMA

5. *Se per gli estremi di due raggi di una sfera posti ad angolo si tirino i rispettivi piani tangenti ad essa; questi s' inclineranno in un angolo, ch' è il supplemento di quello compreso da' que' raggi.*

Imperocchè è chiaro, che se per tali raggi si faccia passare un piano, questo dovrà esser perpendicolare a' due piani tangenti suddetti, e quindi le comuni sezioni di questi con quello dovranno comprendere

l' angolo d' inclinazioni de' piani tangenti. Che perciò nel quadrilatero che vien costituito da queste comuni sezioni e da' raggi, essendovi due angoli retti, i rimanenti due dovranno essere l' uno supplemento dell' altro.

6. *Cor.* 1. Si rileva da ciò che se i raggi erano tre, e disposti come lati di un angolo solido triedro; in tal caso i tre piani tangenti la superficie sferica negli estremi di questi tre raggi dovranno comprendere un' altro angolo solido, in cui le inclinazioni de' piani degli angoli che lo comprendono sono i supplementi rispettivi degli angoli piani dell' angolo solido che aveva per lati i tre raggi.

7. *Cor.* 2. E siccome ogni altro piano perpendicolare ad un de' raggi, in qualunque punto di esso, deve inclinarsi a' piani perpendicolari respettivamente agli altri due raggi, ovunque gli si tirino, in quegli stessi angoli in cui s' inclinavano i tre piani tangenti suddetti; perciò si potrà generalmente dire, che

8. *Cor.* 3. *Se si elevino tre piani perpendicolari respettivamente a' tre lati di un angolo solido triedro questi piani costituiranno nel loro incontro un altro angolo solido, in cui gli angoli d' inclinazione de' piani de' tre angoli che lo comprendono sono respettivamente i supplementi di quelli dell' angolo solido proposto*; che perciò questo nuovo angolo solido si dirà *supplementale*.

9. *Scol.* 1. Ed al contrario si potrà facilmente rilevare, che: *Se da un punto preso in un angolo solido triedro, si abbassino le perpendicolari su i piani de' tre angoli che lo comprendono, queste comprenderanno tre angoli che sono i supplementi rispettivi di quelli in cui inclinansi i piani dell' angolo solido proposto*.

10. *Cor.* 1. Quindi si vede, che dati i tre angoli d' inclinazione de' piani di un angolo solido triedro

sono dati per conseguenza anche quelli che comprendono il suo supplementale : che perciò gli angoli d'inclinazione de' piani di questo (lo che ora mostreremo come facilmente si ottenga), e quindi quelli del suo supplementale, cioè del proposto. Laonde la costituzione di un tal angolo solido si ridurrà alla Prop. XXIII dell' XI°. libro di Euclide.

11. *Cor.* 2. E per mezzo dell' angolo solido supplementale si potrà anche risolvere il caso III°. dal II°., e 'l V° dal IV°, o al contrario.

SCOLIO II.

12. Resta dunque, per completar queste ricerche, a risolvere il seguente

PROBLEMA

Dati i tre angoli piani che comprendono un angolo solido; determinare quelli in cui s' inclinano scambievolmente i piani di essi.

La construzione della *fig.* 14. mostra chiaramente qual via debba tenersi per ciò ottenere. Di fatti è chiaro che se i piani *a*A*a'*, *a*'A'L si abbattano col piano LA'*a*, le *b*C, C'C si porranno in diretto colle *cb*, *c*C'. Laonde per avere gli angoli d' inclinazione di que' due piani al piano del terzo LA'*a*, cioè gli angoli C*bc*, CC'*c*, dovrà praticarsi la seguente construzione.

I tre angoli dati che comprendono l' angolo solido si sviluppino su di un piano intorno ad un punto, come gli presenta la *fig.* 152. ; indi presi ne' loro lati estremi A*a'*, A'D le A'C, A'C uguali, si abbassino da questi punti su delle A'L, A'*a* le perpendicolari CC'*c*,

Cbc, e si producano, finchè s' interseghino in c'. I triangoli rettangoli costituiti respettivamente colle ipotenuse Cb, CC', e co' cateti bc, $C'c$ daranno per angoli opposti all' altro cateto, che sarà in essi lo stesso, gli angoli in cui inclinavansi respettivamente i piani dell' angolo solido proposto a quello dell' angolo $C'A'b$. E l' angolo d' inclinazione di que' piani tra loro si potrà facilmente determinare nel seguente modo, cioè. Si congiunga la bC', e da' punti b, C' si abbassino sulle $A'D$, $A'a$ le perpendicolari bh, $C'H$: se si constituisca un triangolo con queste tre rette; l' angolo cercato sarà quello che in tal triangolo risulterebbe opposto alla bC'. La qual cosa è facilissima a rilevarsi.

SCOL. GENERALE.

13. Nell' esposte ricerche non abbiamo avuto mente che all' uniformità e semplicità delle soluzioni, potendo facilmente ogni qualunque giovine alquanto versato nelle cose geometriche supplire da se all' eleganza delle construzioni da noi indicate.

(B) AL LEMMA DELLA PROP. LVII.

L' analisi geometrica del problema risoluto in questo lemma ci ha condotti a vedere che la tangente comune a due cerchi divide la congiungente de' loro centri nella ragion de' raggi, ma è anche vero più generalmente che: *Una retta la quale ascinde da due cerchi due porzioni simili divide la congiungente de' centri in proporzione de' raggi.*

In fatti sieno ABC, *abc* (*fig.* 153.) i due cerchi da' quali la retta AD ascinda le porzioni simili ACB, *acb*; congiunte le OA, OB; *oa*, *ob* saranno uguali

gli angoli AOB, *aob*, e quindi gli altri OAB, *oab*; laonde sarà OA : *oa* :: OD : *o*D.

(C) AL LEMMA DELLA PROP. LVIII.

Un tal lemma potrà più generalmente enunciarsi nel seguente modo, cioè

Se le congiungenti de' centri di tre cerchi dati si dividano nella corrispondente ragione de' raggi di essi; i tre punti delle divisioni dovranno sempre allogarsi in una retta di sito.

(D) ALLA PROP. LXI.

1. Il problema de' tre cerchi da farsi toccare da un quarto che formava il principale problema de' due libri perduti del *luogo di risoluzione* composti da Apollonio Pergeo, e detti delle *Tazioni*, al rinascimento della Geometria fu dal Vieta proposto a disfida al Geometra de' Paesi Bassi Adriano Romano. Il Vieta e gli altri Geometri di que' tempi, non furono sicuramente paghi della soluzione che per mezzo di due iperboli ne diede Adriano, ed il Vieta stesso si accinse dopo ciò ad una divinazione de' suddetti libri delle Tazioni, ove i dieci problemi di questo geometrico argomento furono da lui risoluti. E sebbene le sue construzioni non sieno sicuramente una divinazione di quelle del Geometra di Perga; poichè egli non procede in tali soluzioni servendosi di que' lemmi stessi, su quali aveva Apollonio stabilite le sue, e che Pappo ci ha conservati nel VII°. libro delle sue Collezioni, pure i Geometri restarono oltre modo contenti di questo suo lavoro, ed egli stesso ne fu sì pago, che onorossi perciò del pomposo titolo di Apollonio Gallo.

Il Newton ne' suoi principj Matematici al Lemma XVI. seppe da' principj stessi di risoluzione di Adriano Romano ricavarne un' elegante soluzione del problema suddetto, convertendo maravigliosamente i due luoghi all' iperbole de' quali si era prevalso, per la composizione di tal problema, quel Geometra, in due luoghi alla linea retta. Egli però con ciò fare si dimostrò non interamente pago della soluzione del Vieta e soggiunse solamente in fine della sua: *Solvitur etiam hoc lemma problematicum per librum tactionum* Apollonii *a* Vieta *restitutum*. E ciò non ostante, l' ingegnoso riducimento del Newton ne offre per tal problema un solo de' due punti soddisfacenti al quesito. Ciò che dopo del Newton abbia fatto il Camerer nella sua opera della Tazioni tanto lodata dal Montucla, a noi non lice il poterlo dire, non avendo potuto, ad onta delle molte ricerche fatte, ottenere un tal libro. Intanto il nostro insigne Matematico Sig. D.Nicola Fergola, tra le altre importanti ricerche da lui fatte sulle opere degli antichi Geometri, messosi a considerare su problemi delle Tazioni, s' avvide che la proprietà dell' iperbole della quale Adriano Romano si avvalse per la sua soluzione del problema de' tre cerchi, e dalla quale il Newton era maravigliosamente ripiegato in construire il problema suddetto coll' intersezione di due rette, poteva dimostrarsi nel triangolo per le pure vie della Geometria Elementare, e dopo ciò egli ne recò a' problemi delle Tazioni semplicissime, uniformi, ed eleganti soluzioni, che furono poi a me di sprone perchè risolvessi in una maniera analoga, e col principio stesso gli altri non meno difficili Problemi de' contatti sferici. E queste soluzioni del Fergola, ed un' indicazione di quelle da me distese su contatti sferici furono pubblicate nel 1809.

2. Questo completo e perfetto lavoro di sì valente Geometra non lasciava per questa parte del luogo di risoluzione altro a desiderare, se non che il suo distintissimo allievo Sig. D. Giuseppe Scorza, cui più che a qualunque altro sta bene ciò che diceva di se Marco Tullio, cioè che *semper in deliciis fuit scrutari vetera, et ex his ea quae scriptores Greciae prodiderant eruere*, meditando su i lemmi che Pappo nel VII°. libro delle sue Collezioni riporta, rilevandoli da' libri delle Tazioni di Apollonio, si avvisò di volere a dirittura divinare l' analisi geometrica Apolloniana del problema de' tre cerchi. E parmi fuori di ogni dubbio, che egli sia riuscito nel suo intento, come farò vedere dopo di aver esposta tal sua soluzione.

LEMMI RILEVATI DALLE COLLEZIONI DI PAPPO, PER LA SUDDETTA SOLUZIONE.

LEMMA I. (*)

3. *Se due cerchi si tocchino scambievolmente o al di dentro, o al di fuori; ogni linea retta che si tira pel contatto ascinderà da essi porzioni simili.*

Sieno i due cerchi ABCD, EFCG (*fig.* 154) i quali si tocchino scambievolmente nel punto C, per

(*) Questo lemma trovasi in seguito della Prop. VIII. del Lib. IV. delle Collezioni suddette, ed è necessario a tal proposizione.

lo quale si tiri la retta CEA, che gli seghi; dico che la porzione ABC sia simile all' altra EFC.

Si uniscano i centri H, K de' due cerchi colla HK, che dovrà passare per C; e si congiungano inoltre le HA, KE. E poichè i due triangoli ECK, ACH hanno di comune l' angolo in C, i lati intorno agli altri due angoli in K, ed in H sono proporzionali, cioè CK : KE :: CH : HA, ed i rimanenti angoli loro in E ed in A sono acuti; perciò essi triangoli saranno simili, e quindi uguali i loro angoli in K ed in H. Laonde le porzioni CFE, CBA saranno simili.

Lemma II. (*)

4. *Dato di grandezza e di posizione il circolo DEG (fig. 129), e dati i tre punti A, B, C nella linea retta ABC; inflettere la ADB, e fare che EF stia per dritto con CF.*

Analisi Geometrica.

S' intenda condotta per E la EG parallela alla ABC, e poi la congiunta GF si distenda in H. E perchè l' angolo EGF adequa sì l' angolo EDF, che l' altro FHB, saranno uguali i due angoli ADB, FHB; e quindi saranno simili i due triangoli ADF, FHB, che hanno anche l' angolo DBA di comune, e sarà AB : BD :: BF : BH: onde il rettangolo ABH sarà uguale al dato FBD, e con ciò ne sarà dato il punto H.

(*) Un tal lemma è il XXII. rilevato da Pappo da' libri delle Tazioni.

Si tiri pur G al medesimo circolo la tangente GK, che incontri la AC in K; sarà dato ancora il punto K. Imperocchè l'angolo HGK è uguale all'altro GEF: mà questo a ragione delle parallele EG, AC adequa FCH; sarà dunque l'angolo HGK uguale all'altro FCH. E quindi essendo simili i due triangoli HGK, HFC, starà CH : HF :: HG : HK, ed il rettangolo CHK sarà uguale al dato FHG. Laonde sarà dato il punto K, e si ridurrà il problema a condurre dal punto K la tangente KG al circolo EDG.

5. *Scol.* L'analisi geometrica qui recata di un tal lemma comprende quella del suddetto lemma XXII di Pappo, e l'altra del problema di riduzione, ch'egli in più lemmi precedenti aveva risoluto.

E come ognun vede un tal lemma problematico è quello da cui si deriva l'altro da noi esposto al *n.* 407 del presente Trattato.

PROBLEMA DELLE TAZIONI

6. *Descrivere un cerchio che insiem ne tocchi tre altri dati di grandezza e di sito.*

Analisi Geometrica di Apollonio restituita dal Sig. Scorza.

Sieno ABC, DEF, GHI (*fig.* 155) i tre cerchi dati intorno a' centri rispettivi M, N, O; e si supponga che il cerchio AEI gli tocchi rispettivamente ne' punti A, E, I. Si congiungano le AE, EI, AI. E poichè la porzione di cerchio AKB è simile all'altra AXE (*lem.* 1.), e che a questa è anche simile la DLE, saranno perciò simili tra loro le porzioni AKB, DLE; che perciò la AE dovrà incontrare la congiun-

gente MN de' centri de' cerchi ABC, DEF nel punto P ov' essa è divisa proporzionalmente a' raggi di quelli. Similmente la AI dovrà incontrare la congiungente MO de' centri M, O de' cerchi ABC, GHI nel punto Q ove quella è divisa in proporzione de' raggi di questi. E così pure la NR starà alla RO, come il raggio del cerchio DEF a quello del cerchio GHI. Laonde i tre punti P, Q, R saranno allogati in una retta di sito (*Not.* C). Or dal punto E si tiri la ES parallela alla PQ, e congiungasi la SI, che incontri in T la PQ, sarà l'angolo STQ uguale al suo alterno ESI: ma questo pareggia l'altro EAI con cui giace nella stessa porzione EXI. Dunque sarà l'angolo STQ uguale all'altro EAI, ed il triangolo APQ sarà simile al triangolo ITQ. Laonde starà PQ : QA :: QI : QT, ed il rettangolo PQT sarà uguale all'altro AQI. Ma questo rettangolo è dato. Adunque sarà dato anche quello, e sarà perciò data la QT, e quindi il punto T.

Inoltre congiungasi la GH: ed essendo la porzione circolare IGH simile all'altra IAE, sarà l'angolo IGH uguale all'altro IAE, e perciò GH parallela ad AE. Laonde se la GH incontri la retta PQR in V, sarà il triangolo GVQ simile all'altro APQ, e quindi ad ITQ: ed il rettangolo VQT sarà uguale all'altro GQI ch'è dato; che perciò sarà dato anche quello, e per conseguenza il punto V. Ed il proposto problema si sarà ridotto ad inflettere al dato cerchio GHI, da' punti dati Q ed R la retta QIR, e fare che GH stia per dritto con VH, cioè al lemma che Pappo ne reca a tal uopo, e ch' è il 2°. da noi quassù proposto.

SCOLIO.

7. Quest' ingegnosa soluzione del problema de' tre cerchi ordita dal Professore Scorza, par fuori di ogni dubbio che debba convenire con quella che di tal problema ne diede Apollonio ne' suoi libri delle Tazioni. Le ragioni che ci confermano in questa opinione sono; il trovare che l' Analisi Geometrica del Sig. Scorza riduce il problema a quello stesso lemma problematico, che Pappo Alessandrino aveva rilevato da' libri delle Tazioni di Apollonio, e che dovè formare precisamente la riduzione Apolloniana del detto problema. Inoltre tutti gli altri principj de' quali il Sig. Scorza si prevale in tale Analisi Geometrica s' incontrano evidentemente nelle Collezioni Matematiche di Pappo. E sebbene in queste non si ravvisi manifestamente che: *dividendosi le congiungenti de' centri de' tre cerchi dati nelle ragioni de' loro rispettivi raggi; i tre punti delle divisioni sieno allogati in una retta*, il qual principio è il maggior cardine della presente analisi geometrica, ciò lungi dal farci sospettare che ad Apollonio non fosse noto, e che di esso non si prevalse nella sua soluzione, dovrà piuttosto farci giudicare che Pappo nol recò nelle sue Collezioni, per la ragione che Apollonio non già lo aveva assunto nella soluzione, come aveva fatto degli altri lemmi che Pappo ha perciò egli rilevati; ma sì bene lo aveva a disteso incidentemente in essa sviluppato. E poi chiunque è versato nel risolvimento de' problemi geometrici, dal vedere che la soluzione del Sig. Scorza procede su principj geometrici degli antichi che Pappo ci ha conservati, e termina collo stesso lemma di riduzione del quale non v'ha alcun dubbio che dovè prevalersi Apollonio per la sua, avrà certamente come indubitato, che

dovè questo insigne geometra passare per quello stesso anello di connessione poc' anzi enunciato.

8. Ma ciò che si è detto non è ancor tutto quello ch si può addurre per istabilire che Apollonio dovè conoscere, e quindi usare il suddetto principio; ed il Sig. Scorza trae anche argomento, in conferma di ciò dal rinvenire nell' VIII°. libro delle Collezioni di Pappo dimostrata la conversa di tal proposizione cogli stessi passaggi che vi bisognano per dimostrare il principio sopra enunciato (7). In fatti volendo dimostrarsi che: *I punti P, Q, R ne' quali le congiungenti i centri de' tre cerchi ABC, DEF, GHI restan divise in proporzione de' loro raggi esistano in una linea retta*, egli vi si conduce nel seguente modo semplicissimo che giudica essere la stessa via che tenne Apollonio.

Si tiri pel centro N del cerchio EFD la NX parallela alla PQ. E poichè sta MA : ND :: MP : PN, ed ND : OI :: NR : RO si avrà, MA : OI :: (MP : PN) (NR : RO). Ma MP : PN :: MQ : QX. Dunque sarà MA : OI o pure MQ : QO :: (MQ : QX) (NR : RO); il perchè sarà RQ parallela ad NX, e perciò in diretto con QP.

9. Vale a dire che potrà conchiudersi da ciò che se: *Da un punto N* (*fig.* 156), *preso in un lato MP del triangolo MPQ, s' inclini all' altro lato MQ la NOR in modo che stia MQ : QO :: (MP : PN) (NR : RO), il punto R dovrà trovarsi nella PQ prolungata.* La cui conversa sarebbe che: *Se nella PQ prolungata si prenda un punto R dal quale s' inclini al triangolo PMQ la RON, dovrà stare MQ : QO :: (MP : PN) (NR : RO)*. E questa conversa trovasi da Pappo dimostrata nella Prop. III. del Lib. VIII; e prima di Pappo l' aveva anche rilevata Tolomeo nel suo Almagesto (*Ved. l' XI°. Cap. del I. lib. in princ.*)

Bisogna dunque conchiudere, per tutte le addotte ragioni, che il lemma sopra enunciato (7) era conosciuto dagli antichi, e che Apollonio dovè di esso prevalersi nella soluzione del problema de' tre cerchi.

10. Intanto il Vieta che nella soluzione del penultimo Problema delle Tazioni aveva mostrato di conoscere il principio che *la retta la quale congiugne i contatti di due dati cerchi con un terzo deve passare per un punto dato*, non seppe poi farne uso nel Problema de' tre cerchi, e quindi ridurne l'analisi geometrica di esso, come doveva, al lemma di Pappo. Ed a me pare fuor di dubbio che ciò sia avvenuto perchè egli mancò di rilevare l'anello di connessione tra il poc' anzi detto principio ed il lemma di riduzione; cioè quello indicato nel n°. 7, del quale si è egregiamente prevalso il Sig. Scorza; e ch' è la pietra angolare della sua soluzione, e dell'Apolloniana. Del resto da tutto ciò dovrà conchiudersene, che il Vieta non procedè giustamente nel restituire le soluzioni Apolloniane de' Problemi delle Tazioni, e che dal confronto dell' analisi geometrica Apolloniana del problema de' tre cerchi restituitaci dal Professore Scorza, con quella del Sig. Fergola si rileva evidentemente quanto il lavoro di questo nostro geometra superi in eleganza ed in semplicità quello del Geometra greco.

(E) ALLA PROP. CXII.

» E si rileverà facilmente, che se l' angolo MHG
» sia maggiore dell' altro LDF, in un tal caso risul-
» terà negativo il valore del coefficiente della x^2, e
» quindi tal curva sarà un' ellisse, ec.

Per facilitare a' giovani l' intelligenza di questo passaggio. Con un qualunque raggio oE (*fig.* 157) si descriva l' arco circolare ETZ, al cui centro o si

costituiscano gli angoli EoT, EoZ uguali respettivamente ad MHG, FDL nella *fig.* 104, e da' punti T, Z si abbassino sul raggio oE le perpendicolari TV, ZS. Sarà il triangolo TVo simile a GMH (*figg.* 104, e 157), e quindi To : oV :: MH : HG :: p : a; che perciò se la To, o Eo s' indichi per p, la oV resterà dinotata da a.

Inoltre sarà il triangolo ZSo simile ad LDF, e quindi oS : SZ :: FD : FL :: q : a.

Or essendo l' angolo MHG maggiore dell' altro LDF, sarà anche ToE > ZoE, l' arco TE > ZE, e TV > ZS. Ma $oS^2 + SZ^2 = oV^2 + VT^2$; che perciò essendo $SZ^2 < VT^2$, sarà $oS^2 > oV^2$, ed oS > oV. Adunque la TV dovrà intersegare la Zo in un punto N, ed esser quindi oN < oZ. È poi oS : SZ :: oV : VN, cioè $q : a :: a : VN = \frac{a^2}{q}$; laonde $oN^2 = a^2 + \frac{a^4}{q^2}$. Ma $oN^2 < oZ^2$, sarà dunque $a^2 + \frac{a^4}{q^2} < p^2$, e perciò $a^2 + \frac{a^4}{q^2} - p^2$, o $\frac{a^2q^2 + a^4 - p^2q^2}{q^2}$ sarà una quantità negativa.

E similmente si dimostrerà che se al contrario l' angolo MHG sia minore di LDF, tal quantità risulterà positiva.

Che se questi angoli diverranno uguali, lo saranno anche gli altri EoT, EoZ, quindi il punto Z, e l' altro N si riuniranno in T, e sarà $\frac{a^4 - p^2q^2 + a^2q^2}{p^2q^2} = 0$; che perciò l' equazione alla curva rappresenterà una parabola.

Finalmente in quest' ultimo caso riunendosi i punti C, H svanirà la CH, cioè c, e l' equazione alla parabola si trasmuterà in $y^2 = a^2$, o $y = a$, ch' è ad una linea retta parallela alla generatrice.

(F) ALLO SCOLIO DELLA PROP. CXII.

Dopo di aver rilevato in questa proposizione, e nello Scol. di essa, che la superficie curva definita nel n. 331 sia quella del cilindroide del Wallis, mi credo nell'obbligo di qui indicare una proprietà importante di questo solido, cioè che: *Se l'asse trasverso dell'iperbole generatrice del cilindroide si prenda per asse maggiore di un ellisse, la quale abbia per semiasse minore la quarta proporzionale in ordine al semiasse primario, al secondario, ed all'eccentricità di quell'iperbole; la superficie della sferoide schiacciata che si genera da siffatta ellisse, e quella del cilindroide corrispondente saranno continuamente uguali.*

La storia di questa bella verità geometrica, le dimostrazioni varie che se ne sono fatte colla geometria degli antichi e coll'analisi moderna elementare, nella Scuola del Sig. Fergola da' suoi distintissimi allievi Sig. Stefano Forte, Felice Giannattasio, Giuseppe Scorza, ed anche da me, e dall'abilissimo Professore Sig. D. Giuseppe Sangro; e le utili ed importanti ricerche alle quali ha dato luogo, nelle loro mani, l'argomento su cui occupavansi, si potranno riscontrare in due Opuscoli inseriti nella Raccolta più volte citata, e nel volume degli Atti della Reale Accademia delle Scienze di Napoli, che sta attualmente stampandosi.

(G) AL n.° 407.

Il Lemma di Pappo qui recato in forma di Teorema, come si è già detto al n°. 5 della nota D, è derivato dal Lemma XXII., ch' egli desunse da' libri delle Tazioni di Apollonio, e del quale noi abbiamo rapportata l'analisi geometrica nella nota suddetta.

(H) AL n.° 409.

Un tal lemma è il XXX. rilevato da Pappo da' libri de' Porismi di Euclide, sebbene diversamente enunciato.

(I) AL n.° 441.

Ecco in qual modo si rileva ciò che si è asserito in questo Corollario, cioè che il punto D (*fig.* 144) si appartenga ad una data iperbole.

Da un tal punto D si conduca la DO parallela alla BC, e congiungasi la BD. Ed essendo il triangolo ABC all' altro ABD, come AC ad AD è 'l triangolo ABD al triangolo DOB, come AB a BO, o come AC a DC, sarà, per equalità ordinata, il triangolo ABC al triangolo DOB come AC² ad AD in DC. Ma si suppone data la seconda di queste due ragioni, ed è anche dato l'antecedente della prima. Dunque sarà dato il triangolo DOB, e quindi il rettangolo di DO in OB, per esservi dato l' angolo DOB. Laonde il punto D appartiensi ad un' iperbole che ha per assintoti le BA, BC, e per potenza un quadrato quanto il dato rettangolo di DO in OB.

Finalmente per dilucidare la conchiusione di un tal corollario, soggiugneremo che: essendo data la ragione di AC ad AD, sarà anche data la sua uguale di CB a DO. Ma è data la DO; dunque sarà data la CB, dal cui estremo C dovrà condursi al punto D la CD, che sarà la retta addimandata.

(K) Al *n.°* 450.

Allorchè la retta che unisce i concorsi delle due inflesse co' lati dell' angolo dato deve esser parallela alla direttrice, ch' è la prima parte del presente Problema, vi si potrà recare la seguente semplicissima soluzione indipendente dal lemma esposto nel *n.* 448, cioè

Si unisca l' ignoto punto Q (*fig.* 158.) col vertice L del dato angolo MNL, e tal retta si distenda insino alla direttrice. Saranno le due ragioni di MG ad NG, e di AG a BG uguali fra loro, perchè uguali alla medesima ragione di PH ad RH: onde per l' uguaglianza di quelle due ragioni sarà il rettangolo MGB uguale all' altro AGN. E perciò se descrivansi sulle MB ed AN, e dalla medesima parte i due semicerchi MKB, AKN, e poi dal punto ov' essi s' intersegano si abbassi sulla MN la perpendicolare KG, congiunta la GL, questa segnerà nella curva SQT il punto che si cerca.

(L) AL *n.°* 459.

» Quindi è che dinotando per *m* il grado della
» derivata, dovrà esser . . . . $\frac{1}{2}$ (m^2+3m) il nume-
» ro de' punti pe' quali dee passare tal derivata, per
» avere una determinata posizione.

Veggasi su di ciò il Cap. IV. della *Theoria Linearum Curvarum* di Eulero. E qui soggiugneremo solamente, che l' espressione $\frac{1}{2}$ $(m^2 + 3m)$ debba essere sempre un numero intero, il che intuitivamente si vede se *m* è pari; e supponendo *m* impari ed espresso da $2k+1$, quel binomio si cambierà in $\frac{1}{2}$ $(2k+1)$ $(2k+4) = (2k+1)(k+2)$, la quale espressione è evidentemente un intero.

INDICE

DE' CAPITOLI.

Per rendere questo Trattato utile a coloro che dovranno farne uso per una prima istituzione di Geometria di Sito, segnerò con un asterisco que' Capitoli di esso, che sono necessarj a tal primo insegnamento, cioè nel seguente modo (*), potendo l' apprendimento de' rimanenti servire a quegli altri, che desiderano di addestrarsi completamente nell' invenzione geometrica di sito.

ERRATA

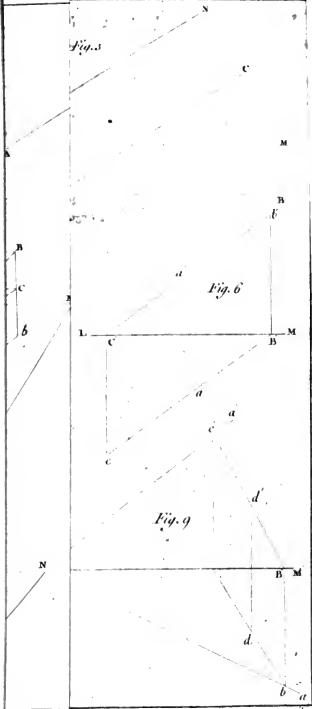
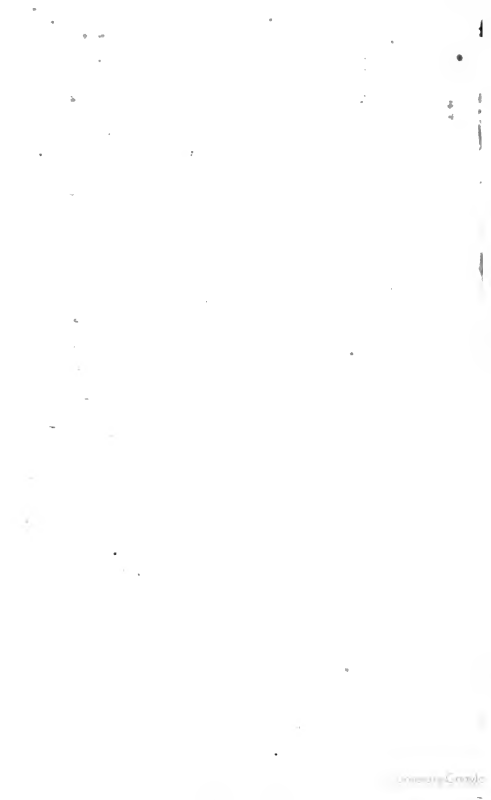
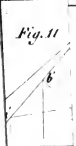
Delle cose più essenziali.

Pag.	lin.		
XVI.	6	*dato*	*data*
11	4	*Sebbene quì si trovi, per equivoco, un' altra proposizione segnata per VIII., e che un tal equivoco si sia continuato sino alla fine; pur tuttavia da esso non ne deriva alcuna confusione nelle citazioni, poichè il numero del paragrafo le distingue.*	
19	12	A	A'
20	31	(*c.* 1. *p.* VIII.)	(27)
30	14 in 15	maggiore	minore
31	14	A'*a*	A'*a*'
45	19	*f*E'	*f*E'
52	10	*c*	*e*
	16	95	96
	27	*a*	*a*'
55	8	*c*	*e*
56	9	*c'd*	*c'd'*
61	10	D*a*	*da*
	24	*ab*'	*ab*
62	2	col	sul
68	11	Def. XIX.	Def. XIV.
73	18	l' una l' altra	l' una e l' altra
77	9 in 10	revarvela	recarvela
	24 in 25	rispettive projezioni	projeziono rispettive delle sezioni
78	7	*k*L'*k*'	*k*K'*k*'
79	11	*a*, *c*	*b*, *c*
80	1	Prop. LVII.	Prop. LVIII.
83	2	*f*TVF	*f*TVE
	5	*f*F'	*f* F'
	24	G	C
86	31	*c*	*c*'

E R R A T A

Delle cose più essenziali.

Pag.	lin.		
XVI.	6	*dato*	*data*
1I	4	*Sebbene quì si trovi, per equivoco, un' altra proposizione segnata per VIII., e che un tal equivoco si sia continuato sino alla fine; pur tuttavia da esso non ne deriva alcuna confusione nelle citazioni, poichè il numero del paragrafo le distingue.*	
19	12	A	A'
20	31	(*c*.1. *p*.VIII.)	(27)
30	14 in 15	maggiore	minore
31	14	A'*a*	A'*a'*
45	19	*f*E'	*f*E'
52	10	c	*e*
	16	95	96
	27	*a*	*a'*
55	8	c	*e*
56	9	*c'd*	*c'd'*
61	10	D*a*	*da*
	24	*ab'*	*ab*
62	2	col	sul
68	11	Def. XIX.	Def. XIV.
73	18	l' una l' altra	l' una e l' altra
77	9 in 10	revarvela	recarvela
	24 in 25	rispettive projezioni	projezione rispettive delle sezioni
78	7	*k*L'*k'*	*k*K'*k'*
79	11	β, c	*b*, c
80	1	Prop. LVII.	Prop. LVIII.
83	2	*f*TVF	*f*TVE
	5	*f*F'	*f* F'
	24	G	C
86	31	*c*	c'

97		*Avvertasi che i §§ 165, 166, e 167 in questa pagina sono ripetuti. Fortunatamente però essi non debbono esser citati in appresso.*	
108	28	più	di più
134	24	PS	P*x*
	25	ST	*xy*
142	20	A	R
	28	effettuita	effettuata
148 *lin. ult.*, e 149 *lin.* 1		- *In vece di dire* . . . . . Si prenda sulla PS la P*s* [illegible]ale alla B*x*, *deve dire* -- Si applichi tra la tangente PS e 'l cerchio PQT la *s*T = B*x*	
157	27	erigano	eriggano
160	9	*La fig. pel lemma è l'* 81	
164	12	con	co'
179	21	z	Z
181	25	*n*'N*n*'	*n*'N*n*
197	27	BH	BN
200	18	*Iperboloide*	*Hyperboloide*
215	19	*a'p'i'r'*	*a'i'p'*
225	16	*cb-a ca*	*cb* a *ca*
227	20 in 21	Il *pezzo* . . . . . cioè stia QS : SR : : *m* : *n* . . . *si deve supprimere in questo luogo, e porsi nella linea* 25 *dopo* . . . di *m* : *n* . . ., *e prima di* . . . Per S	
237	8	per i	pe'
241	2	M	FN
	28	*a e*	*a e*
243	9	*nella*	*in*
279	19	DFH	DFE
280	21	ARQ	ARG
290	24	pia-	piani
292	1	inclinazioni	inclinazione
299	1	pur	per
	28	AXE	AYE
300	13	EXI	EYI

Tav. 1
Fig. 3
Fig. 6
Fig. 9

Tav. I
Fig. 11
Fig. 13.
Fig. 17.
Fig. 20.
L
M
P
A
B
C
E
F

Tav. III
Fig. 24.
Fig. 27.

Tav. IV
Fig. 32.
d'
b'
c'
M
d
b
P
c
g
Fig. 35.
c'
k'
a'
g'
b
L
M
N'
K'
h
l
p
d
c
a
q
b

Fig. 38.
Fig. 41.

Fig. 44.
B
G
K
P
C
M
H
S
N
m
E
p
R
D
Fig. 45.
T
C
S
D
K
L
O
H
F
Fig. 48.
G
C

S
R
H
I
H
R
Fig. 53
O
D
C
E

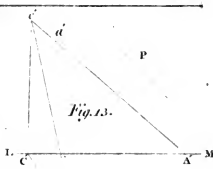
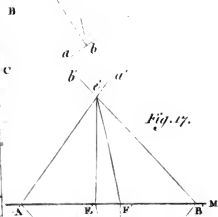
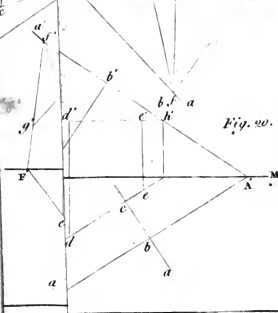
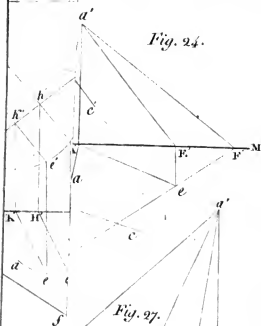
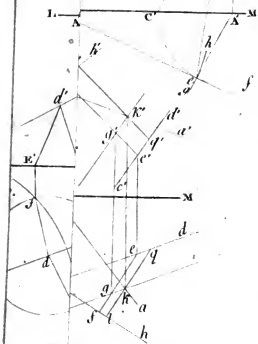
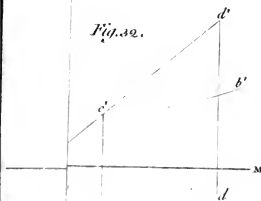
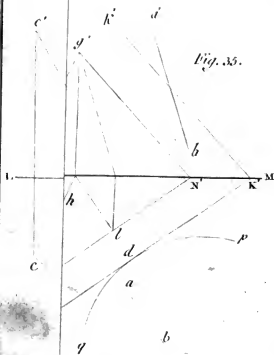
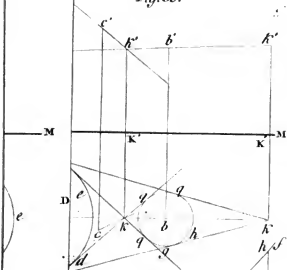
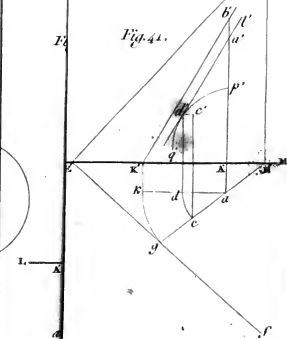
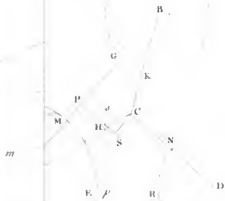
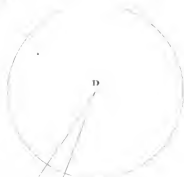
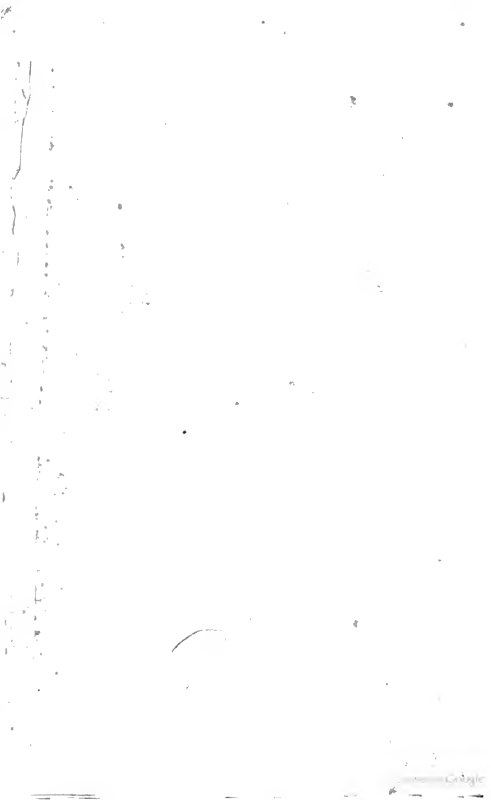
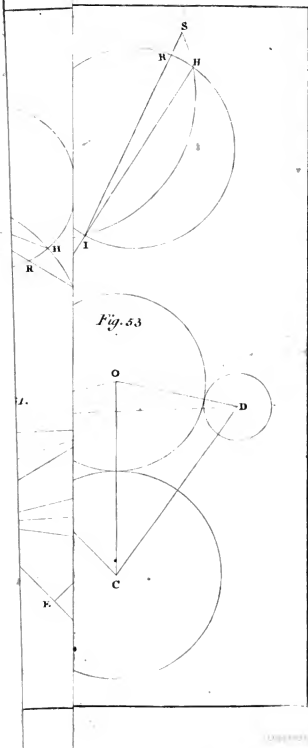
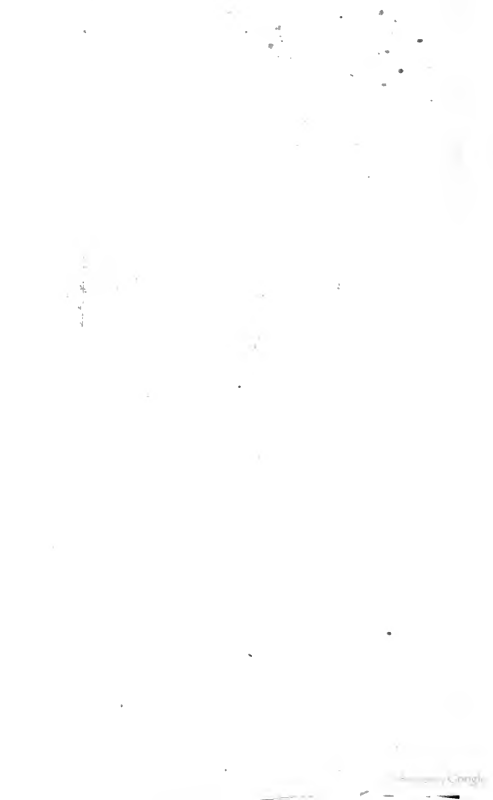



Fig. 56.

Fig. 59.

Fig. 61.
Fig. 63.
Fig. 62.
M
A'
B'
V
B'
O'
D'
C'
M
E
D

Fig. 67.

D

O

Fig. 71.

h'

d''' b

d''

f' m

z'

d' b'

D' B' F' M

Y

d

L O F

d

B

X

Tav. XI
Fig. 73
Fig. 74
Fig. 78
b'
n'
s'
B'
R'
M
a
D
F
A
B
R
P
Q
S
s
T
E
R
f'
k'
x'
V'
D'
B
K'
X'
F'
M
G
I
N
k
K
D
H
V

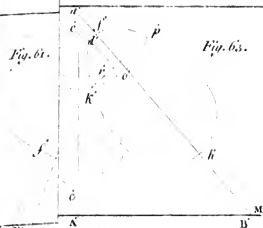
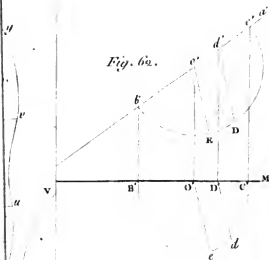
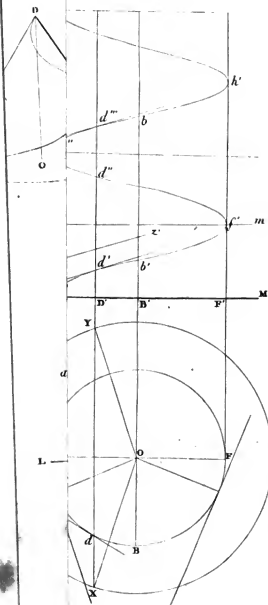
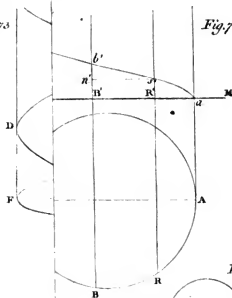



Fig. 80.
H
B
B
h
Fig. 82.
E
D
F
a
G
C
H
Fig. 85
D
E
e
c
a
L
d
I
Fig. 87.
c
n
d
F
B
D
N
E

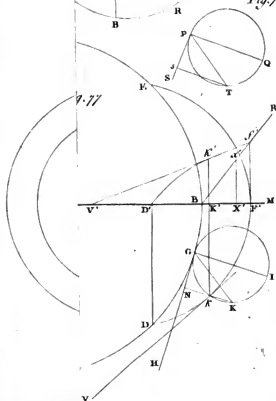
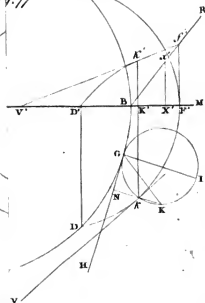
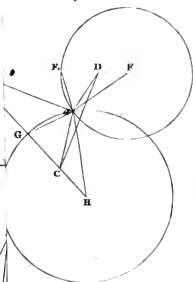
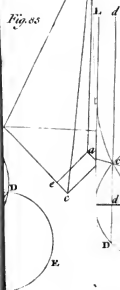
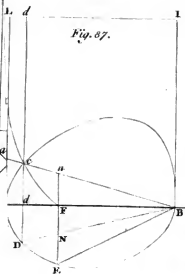
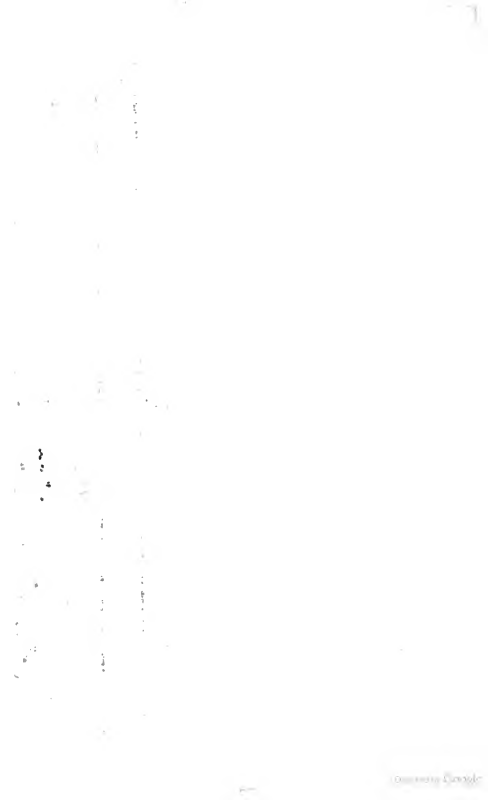



Fig. 89.

Fig. 91.

Fig. 93

Fig. 95.

Fig. 97.
D
E
F
G
C
B
A
Fig. 99.
F
E
D
l
L'
L
C
G
m
A
b
H
M
K
B
Fig. 101.
A
M
D
F
B
E
L
H
C
Fig. 103.
E
M
F
L
B
e
D

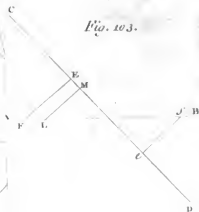
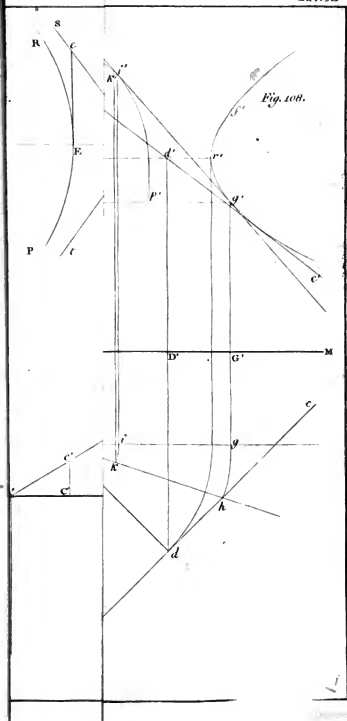
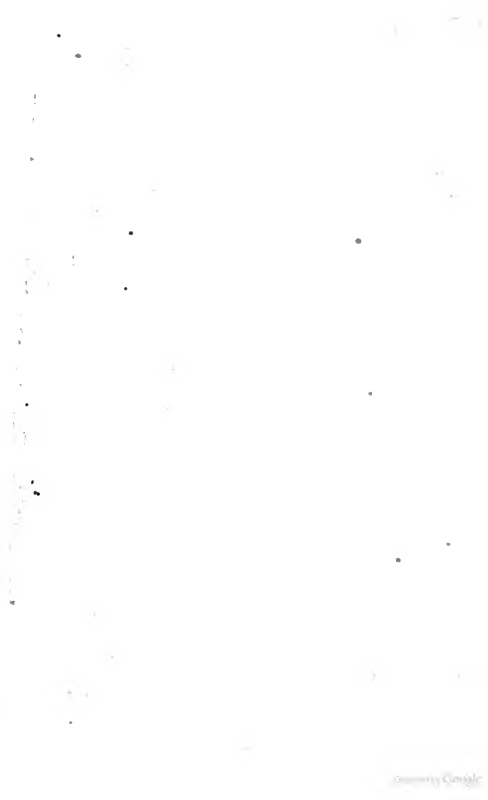
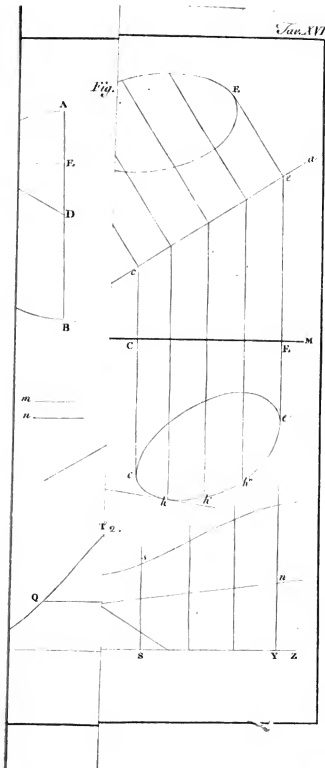



Fig. 108.

Fig.
A
E
D
B
E
a
e
c
C
M
E
m
n
e
c
h
h
h
T 2.
s
n
Q
S
Y
Z

114. N.° 2.
Fig. 117.
Fig. 119.
Fig. 120. N.° 2.

Fig. 124.
R
B
A
D
X
V
K
T
F
H
Z
Y
123.
N
Q
M
n
c
B
Fig. 126.
E
S
R
T
Q
D
C
X
K
f
m
Q
N.º 1
P
Fig. 128.
N
L
M
A
N.º 2
K
C
B
D
G
H
E
F

Tav. XIX.
Fig. 130
Fig. 132.
Fig. 134
Fig. 136.
D
N
I
L
E
Q
O
R
G
F
M
C
K
B
B
E
Q
A
F
D
C
H
M
G
P
I
K
V
O

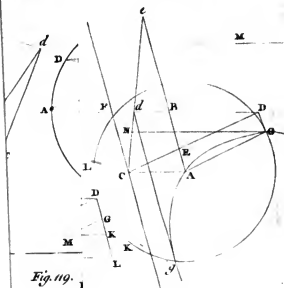
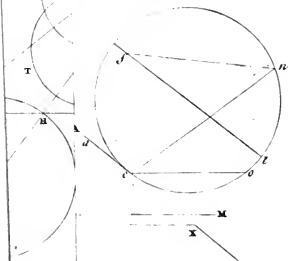
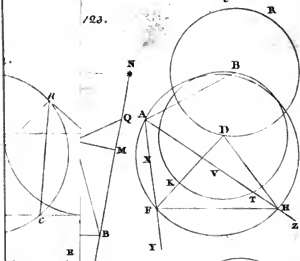
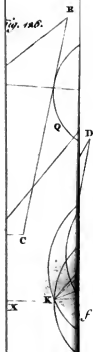
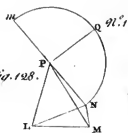
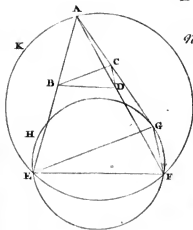
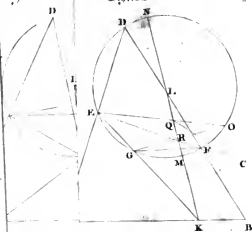
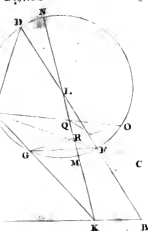
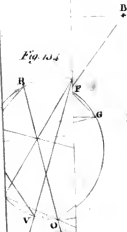
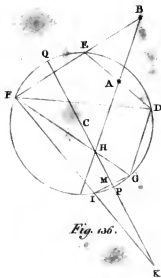



Fig. 130
Fig. 132.
Fig. 134
Fig. 135
Fig. 136.

Fig. 138.
C
O
Fig. 140.
B
T
D
C
E
F
Q
G
R
m
n
Fig. 144
Q
B
E
Q
C
P
A
X
B
a
d
c
E
O
P
A
D
C
M
G
N

Fig. 146.
A
C
F
A
I
C
Fig. 148.
Q
D
G
F
E
N
m
n
M
C
B
A
Fig. 151.
Q
n
a
B
b
n
N
S
r
H

Fig. 154.
D
C D
b
c
a
B
O
C
D
G
K
E
H
F
A
B
Fig. 156.
Q
N
T
L
K
P
H
R
A
G
B
N